

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 1

2006

1. Soient E et F deux ensembles non vides et soit $f: E \rightarrow F$ une application.

(a) Montrer que si \mathcal{F} est une tribu de parties de F alors

$$f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$$

est une tribu de parties de E appelée *tribu image réciproque de \mathcal{F} par f* . De plus, $f^{-1}(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu sur E rendant $f: (E, f^{-1}(\mathcal{F})) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ mesurable.

(b) Soit \mathcal{E} une tribu sur E . Montrer sur un exemple que, en général,

$$f(\mathcal{E}) := \{f(A) : A \in \mathcal{E}\}$$

n'est pas une tribu sur F .

(c) Soit \mathcal{E} une tribu sur E . Montrer que

$$\mathcal{F}_f := \{B \subset F : f^{-1}(B) \in \mathcal{E}\}$$

est une tribu de parties de F qu'on appelle *tribu induite de \mathcal{E} par f* . De plus, \mathcal{F}_f est la plus grande tribu sur F telle que $f: (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F}_f)$ soit mesurable.

(d) Montrer que si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(F)$, alors on a $f^{-1}(\sigma(\mathcal{D})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{D}))$.

2. (a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A = -A\}$ est une tribu sur \mathbb{R} où $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

(b) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

3. Soit X un ensemble non vide. On appelle *partition* de X une famille $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ de parties non vides de X telle que :

$$P_i \cap P_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } \bigcup_{i \in I} P_i = X.$$

(a) Soit $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ une partition de X . Caractériser :

(i) $\sigma(\mathcal{P})$ si I est fini ou infini dénombrable,

(ii) $\sigma(\mathcal{P})$ si I est non dénombrable.

(b) Montrer que si \mathcal{M} est une tribu sur X et si X est dénombrable (c.à.d. fini ou infini dénombrable), alors il existe une partition \mathcal{P} de X telle que $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{P})$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

4. Soit \mathcal{A} une algèbre de Boole de parties d'un ensemble X et soit $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ une application additive telle que $\mu(X) < \infty$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) μ est σ -additive, c.à.d. si (A_n) est une suite d'ensembles de \mathcal{A} deux à deux disjoints dont la réunion $\cup_n A_n$ appartient à \mathcal{A} , alors $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.
- (b) μ vérifie la propriété de la continuité croissante, c.à.d. si (A_n) est une suite croissante telle que $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_n A_n)$$

- (c) μ vérifie la propriété de la continuité décroissante, c.à.d. si (A_n) est une suite décroissante telle que $\cap_n A_n \in \mathcal{A}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\cap_n A_n)$$

- (d) μ est continue en \emptyset , c.à.d. si (A_n) est une suite décroissante telle que $\cap_n A_n = \emptyset$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$$

Est-ce encore vrai sans faire l'hypothèse $\mu(X) < \infty$?

5. Soit X un ensemble non dénombrable et \mathcal{A} la tribu sur X engendrée par les singletons $\{x\}$, $x \in X$. On définit $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ par :

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A \text{ est codénombrable (c.à.d. si } A^c \text{ est dénombrable).} \end{cases}$$

Montrer que P est une mesure de probabilité sur (X, \mathcal{A}) .