

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 10

2006

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable et deux à deux non corrélées, telles que $\frac{1}{n^2}(\text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n)) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On définit $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ |\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon \} = 0.$$

2. Soient X_1, \dots, X_n des v.a. indépendantes de même loi et donc de même fonction de répartition F .

(a) Trouver les fonctions de répartitions pour

$$M_* = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{et} \quad M^* = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

(b) Si F est absolument continue avec densité p , déterminer les densités de M_* et M^* .

(c) Trouver la loi commune de M_* et M^* , c.à.d.

$$\mathbb{P}(M_* \leq x, M^* \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Pour tout $n = 1, 2, \dots$ soit $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq i_n}$ une suite finie de v.a. ($i_1 \leq i_2 \leq \dots$) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Toute $X_{n,i}$ est de Bernoulli, c.à.d. $p_{n,i} := \mathbb{P}\{X_{n,i} = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{X_{n,i} = 0\}$, telle que

$$\max_{1 \leq i \leq i_n} p_{n,i} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

(b) Les v.a. $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,i_n}$ sont indépendantes pour tout n .

(c) Il existe $\lambda > 0$ tel que $p_{n,1} + \dots + p_{n,i_n} \rightarrow \lambda$, quand $n \rightarrow \infty$.

On pose $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,i_n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}\{S_n = k\} \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

4. Une v.a. aléatoire X à valeurs dans $]0, \infty[$ est dite suivre une *loi log-normale* de paramètres (μ, σ) (μ réel, $\sigma > 0$) si $Y = \log X$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition et la densité de X .

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{var}(X)$.

(c) Si X suit une loi log-normale de paramètres (μ, σ) , alors X^r ($r > 0$) suit une loi log-normale de paramètres $(r\mu, r\sigma)$.

5. Une v.a. X à valeurs réelles est dite suivre une *loi de Cauchy* si elle est absolument continue et admet pour densité

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que l'espérance $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.
 - (b) Soit U une v.a. uniformément répartie sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Alors $X = \tan U$ suit une loi de Cauchy.
 - (c) Si X suit une loi de Cauchy, il en est de même de $1/X$.
6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- (i) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. réelles de même loi, alors on a :
$$\mathbb{E}|X_1| < \infty \implies \mathbb{P}\{|X_n| \leq n \text{ finalement}\} = 1.$$
 - (ii) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi, alors on a :
$$\mathbb{E}|X_1| < \infty \iff \mathbb{P}\{|X_n| > n \text{ se réalise une infinité de fois}\} = 0.$$