

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 11

2006

1. *Le problème de l'aiguille de Buffon (1777)*

Un plan est strié de droites parallèles espacées d'une distance 1. On lance au hasard une aiguille de longueur $\ell < 1$. Avec quelle probabilité l'aiguille coupe-t-elle une des droites ? (Noter qu'on peut utiliser cette expérience pour estimer numériquement la valeur de π).

2. *Un jeu profitable, où l'on perd à long terme*

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. Bernoulli indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\{Z_n = 0\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_n = 1\} = 1/2.$$

On définit un jeu de la façon suivante: Soit $K_0 = 1$ la fortune initiale et K_n la fortune après le n -ième coup. Pour $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \begin{cases} \frac{1}{2} K_{n-1} & \text{si } Z_n = 0 \\ \frac{5}{3} K_{n-1} & \text{si } Z_n = 1. \end{cases}$$

(a) Montrer que le jeu est profitable: $\mathbb{E}[K_n] > \mathbb{E}[K_{n-1}]$ et $\mathbb{E}[K_n] \rightarrow +\infty$, quand $n \rightarrow \infty$.

(b) Montrer qu'il existe une constante $\lambda < 0$ telle que $\mathbb{P}\{K_n \leq \exp(\lambda n)\} \rightarrow 1$, quand $n \rightarrow \infty$.

3. *La ruine du joueur*

Un joueur mise 1 euro sur un événement R (par exemple la sortie du rouge à la roulette), qui se produit avec une probabilité $p = \mathbb{P}(R)$ ($0 < p < 1$). Sa mise initiale est k euros, son but est d'augmenter son capital jusqu'à K euros ($0 \leq k \leq K$). Il jouera jusqu'à ce qu'il soit ruiné, ou qu'il ait gagné ce capital. Soit p_k la probabilité que le joueur atteigne son but, en partant d'un capital initial de k euros. On pose $r = (1 - p)/p$. Montrer que

$$p_k = \begin{cases} \frac{k}{K} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \frac{1 - r^k}{1 - r^K} & \text{si } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. *Grandes déviations*

Soient X_1, \dots, X_n indépendantes de même loi μ et soit $\hat{\mu}(t) := \mathbb{E}[e^{tX_1}]$. On suppose que $\hat{\mu}(t) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La transformée de Cramér I_μ de μ est définie par

$$I_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty], \quad I_\mu(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)].$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pour tout $a \geq \mathbb{E}(X_1)$, montrer qu'on a :

$$\mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq a\right\} \leq \exp\{-nI_\mu(a)\}.$$

Pour $\rho(t) := \log \hat{\mu}(t) - ta$ on remarque que $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) \leq 0$ et que ρ est convexe sur \mathbb{R} .

5. *L'inégalité de Hoeffding*

Soient X_1, \dots, X_n des v.a. centrées et indépendantes telles que $a_i \leq X_i \leq b_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer qu'on a:

$$\mathbb{P}\{S_n \geq c\} \leq \exp\left(-\frac{c^2}{2m}\right), \quad \forall c > 0,$$

où $m := \sum_{i=1}^n \max\{a_i^2, b_i^2\}$.

6. *Théorème de Weierstrass*

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le *polynôme de Bernstein* défini par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

Pour $x \in]0, 1[$, soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre x . On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

(a) Déterminer la moyenne $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$.

(b) En déduire que la suite des polynômes B_n converge vers f uniformément sur $[0, 1]$.