

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 12

2006

1. *Processus de Poisson*

Désignons par N_I le nombre aléatoire de certains événements qui se produisent dans un intervalle de temps $I \subset \mathbb{R}_+$ donné. Supposons que les v.a. N_I à valeurs dans \mathbb{N} vérifient les propriétés suivantes :

- (i) La loi de N_I dépend seulement de la longueur $|I|$ de l'intervalle I (et $N_I = 0$ si $|I| = 0$).
- (ii) Les variables N_{I_1}, \dots, N_{I_n} sont indépendantes pour des intervalles $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}_+$ deux à deux disjoints.

La famille de v.a. $\{N_t := N_{[0,t]} : t \geq 0\}$ est appelé *processus de comptage*. Montrer que $\{N_t : t \geq 0\}$ est un *processus de Poisson*, c.à.d. il existe $\lambda > 0$ tel que toute variable N_t suit une loi de Poisson de paramètre λ :

$$\mathbb{P}\{N_t = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Indication. Montrer les propriétés suivantes :

- (a) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{P}\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t}$.
- (b) $\mathbb{P}\{N_h = 1\} = \lambda h + o(h)$ et $\mathbb{P}\{N_h \geq 2\} = o(h)$, lorsque $h \searrow 0$.
- (c) Pour $P_n(t) := \mathbb{P}\{N_t = n\}$, $n \geq 1$, on a $P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$ où P'_n désigne la dérivée à droite de P_n .

2. *Temps d'attente*

Soit $\{N_t : t \geq 0\}$ le processus de Poisson de paramètre λ , comme dans l'exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \inf\{t \geq 0 : N_t = n\}$ l'instant où se produit le $n^{\text{ième}}$ top et $T_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$) la durée séparant le $(n-1)^{\text{ième}}$ du $n^{\text{ième}}$ top. Montrer que :

- (a) Pour $t \geq 0$, on a $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{S_n \leq t\}} = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$.
- (b) La suite (T_n) est formée de v.a. indépendantes, dont chacune suit une loi exponentielle de paramètre λ .
- (c) Pour tout $n \geq 1$, la variable S_n suit une loi de gamma de paramètre (n, λ) , c.à.d. une loi de densité

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} 1_{\{t \geq 0\}}.$$

3. *Paradoxe de l'autobus*

Soit $\{N_t : t \geq 0\}$ le processus de Poisson de paramètre λ , comme dans l'exercice 1. Pour $t > 0$, l'intervalle $[S_{N_t}, S_{N_t+1}]$ de longueur T_{N_t+1} contient t . Partageons l'intervalle $[S_{N_t}, S_{N_t+1}]$ en les deux intervalles partiels $[S_{N_t}, t]$ et $[S_{N_t}, S_{N_t+1}]$ de longueurs respectives T' et T'' .

- (a) Calculer la loi du couple (T', T'') .

- (b) Montrer que T' et T'' sont indépendantes, et que T'' suit une loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi de T' .
- (c) Calculer $\mathbb{E}[T' + T'']$.
- (d) Imaginons que les tops soient les arrivées successives d'un autobus. Un passager arrive à l'arrêt à l'instant t . Quelle est l'espérance de son temps d'attente ?