

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 13

2006

1. *Loi binomiale négative*

Dans un jeu de pile ou face, la probabilité d'avoir pile est p , et celle d'avoir face est $1 - p$ ($0 < p < 1$). Soit N_r le nombre de jets nécessaires pour obtenir r fois pile.

- (a) Calculer la fonction génératrice G_{N_r} de N_r .
- (b) En déduire la loi de probabilité de N_r .

2. *Somme aléatoire de variables aléatoires*

Soit (X_n) une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes et de même loi. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit T une v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendante de la suite (X_n) , et S_T la v.a. définie par $(S_T)(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Montrer les assertions suivantes :

- (a) Si G_{X_1} et G_T désignent respectivement les fonctions génératrices de X_1 et T , la fonction génératrice de S_T est donnée par $G_{S_T} = G_T \circ G_{X_1}$.
- (b) *Identités de Wald*
Si $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ et $\mathbb{E}[T] < \infty$, alors $\mathbb{E}|S_T| < \infty$ et $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[T]$.
Si, en plus, $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$ et $\mathbb{E}[T^2] < \infty$, alors

$$\text{var}(S_T) = \text{var}(X_1) \cdot \mathbb{E}[T] + \text{var}(T) \cdot (\mathbb{E}[X_1])^2.$$

3. *Marches aléatoires. Jeu arrêté*

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Il reçoit un euro de la banque s'il obtient pile et donne un euro à la banque s'il obtient face. Les fluctuations du jeu sont décrites par une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. indépendantes égales à $+1$ ou à -1 ($+1$ pour pile, -1 pour face) telles que $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = \mathbb{P}\{X_n = -1\} = 1/2$. La fortune du joueur après le n -ième coup est $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_0 = 0$. On a $\mathbb{E}[S_n] = 0$ et le joueur se demande s'il peut améliorer son gain en arrêtant de jouer à un instant favorable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{A}_n := \sigma\{S_0, \dots, S_n\}$ la tribu engendrée par S_0, \dots, S_n . On appelle *temps d'arrêt* une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\{T = n\} \in \mathcal{A}_n \quad \text{pour chaque } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer les assertions suivantes :

- (a) Si R, T sont deux temps d'arrêt, alors $R \wedge T = \min(R, T)$, $R \vee T = \max(R, T)$ et $R + T$ sont aussi des temps d'arrêt.
- (b) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mathbf{1}_{A_n}] = 0$ pour tout $A_n \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 0$.
- (c) $\mathbb{E}[S_T] = 0$ pour tout temps d'arrêt T tel que $\mathbb{E}[T] < \infty$.
- (d) $T_c = \inf\{n \geq 0 : S_n = c\}$ pour $c \in \mathbb{N}$ est un temps d'arrêt (avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$).
- (e) En déduire que $\mathbb{E}[T_c] = +\infty$ pour tout $c \neq 0$.

4. *Stratégies. Arrêtez si vous gagnez*

Dans la situation de l'exercice 3, soit $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$ une suite de v.a. bornées, telles que β_k soit \mathcal{A}_{k-1} -mesurable pour $k \geq 1$. On pose :

$$S_n^{(\beta)} = \sum_{k=1}^n \beta_k X_k = \sum_{k=1}^n \beta_k (S_k - S_{k-1})$$

La suite $(\beta_k)_{k \geq 1}$ peut être interprétée comme une *stratégie de jeu*: β_k représentant la somme mise au k -ième coup et $S_n^{(\beta)}$ le gain après n coups.

(a) Montrer que les suites suivantes satisfont les hypothèses d'une stratégie de jeu :

- i. $\beta_k = 1_{\{T \geq k\}}$ où T est un temps d'arrêt.
- ii. (*Doublement successif de la mise jusqu'au premier +1*)
 $\beta_k = 2^{k-1} 1_{\{T \geq k\}}$ avec $T := \inf\{n \geq 1 : X_n = +1\}$.
- iii. $\beta_k = S_{k-1} 1_{\{T \geq k\}}$ où T est un temps d'arrêt.

(b) Montrer que $\mathbb{E}[S_n^{(\beta)}] = 0$ pour tout n et toute stratégie de jeu $(\beta_k)_{k \geq 1}$.

(c) En déduire que $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T]$ pour tout temps d'arrêt T intégrable.

5. *Temps d'attente à la ruine*

On reprend la situation de l'exercice 3.

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{a_1 \leq S_n \leq a_2\} = 0$ pour tout intervalle $[a_1, a_2]$ fini dans \mathbb{R} .

(b) Calculer

$$\mathbb{P}\{T_{-a} < T_b\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\{T_b < T_{-a}\}, \quad -a < 0 < b.$$

(c) Soit

$$T_{a,b} := T_{-a} \wedge T_b = \inf\{n \geq 0 : S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

Montrer qu'on a $\mathbb{E}[T_{a,b}] = ab$.