

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 14

2006

1. *Retours à zéro* (voir Ex. 6 du Devoir 2 à la maison)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{X_n = -1\}$ pour tout n . On pose $p = \mathbb{P}\{X_n = 1\}$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que

$$\mathbb{P}\{S_n = 0 \text{ se réalise une infinité de fois}\}$$

vaut 1 ou 0 selon que $p = \frac{1}{2}$ ou que $p \neq \frac{1}{2}$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $[0, 1]$, indépendantes et de loi uniforme.

Montrer que l'ensemble $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$, pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Indication. Lemme de Borel-Cantelli

3. (a) Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. Bernoulli indépendantes telles que

$$\mathbb{P}\{Z_n = 1\} = \mathbb{P}\{Z_n = -1\} = 1/2.$$

Montrer que $X_n := \sum_{k=1}^n Z_k 2^{-k}$ converge p.s. vers une variable X de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

(b) En déduire de (a) que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{t} \quad (\text{avec la convention } \frac{\sin 0}{0} := 1).$$

4. *Renouvellements*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. qui sont i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées), avec $X_n \geq 0$ et $0 < \mathbb{E}[X_1] < +\infty$. Typiquement, ces variables modélisent les durées de vie de différentes pièces de rechange intervenant dans la maintenance d'un appareil. Alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est la durée totale de fonctionnement de l'appareil après n renouvellements de la pièce considérée (avec $S_0 := 0$) et $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$ correspond au nombre de renouvellements jusqu'au temps t .

Montrer que

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \quad \text{p.s., lorsque } t \rightarrow \infty.$$

5. *Une méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales*

Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Le but de cet exercice consiste à calculer $\int_0^1 f(x) dx$ numériquement. Soit $(X_n^\ell)_{n \geq 1, \ell \in \{1, 2\}}$ une famille de v.a. à valeurs dans $[0, 1]$, indépendantes et de loi uniforme. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{f(X_i^1) \geq X_i^2\}} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad \text{p.s., lorsque } n \rightarrow \infty.$$

6. *Nombres normaux* (Borel 1909)

Fixons $2 \leq d \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in [0, 1[$ et

$$\omega = \frac{\omega_1}{d} + \frac{\omega_2}{d^2} + \frac{\omega_3}{d^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{d^n}, \quad \omega_n \in \{0, 1, \dots, d-1\}$$

le développement d -adique de ω . On appelle ω *d-normal* si

$$\frac{\text{card}\{i \leq n : \omega_i = k\}}{n} \rightarrow \frac{1}{d}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

Montrer que, sauf un ensemble de mesure de Lebesgue 0, tout nombre ω dans $[0, 1[$ est normal.

7. *Martingales et temps d'arrêts*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F} . Une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de v.a. réelles et intégrables est appelée une *martingale* si

- (i) X_n est \mathcal{F}_n -mesurable pour chaque n ;
- (ii) $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m$ p.s. pour tous $m \leq n$.

Une v.a. $T: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est appelée un *temps d'arrêt* si $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer les assertions suivantes :

- (a) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et T un temps d'arrêt, alors $(X_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est aussi une martingale.
- (b) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et T un temps d'arrêt borné par une constante, alors on a $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

8. *La ruine du joueur; suite*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. Bernoulli indépendantes avec

$$\mathbb{P}\{X_n = 1\} = p, \quad \mathbb{P}\{X_n = -1\} = q, \quad 0 < p < 1, \quad p + q = 1.$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ (avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ = "la tribu triviale" et $S_0 = 0$). Montrer les assertions suivantes :

- (a) La suite $(S_n - n(p - q))_{n \geq 0}$ est une martingale.
- (b) La suite $\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right)_{n \geq 0}$ est une martingale.
- (c) La variable $T = T_{a,b} := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = a \text{ ou } S_n = -b\}$ est un temps d'arrêt (pour tout $a, b \in \mathbb{N}^*$). En plus, on a $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$ et $\mathbb{E}[T] < \infty$.
- (d) Pour

$$P(p; a, b) := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : n \mapsto S_n(\omega) \text{ est plus tôt en } a \text{ qu'en } -b\} \quad (a, b \in \mathbb{N}^*, p \neq q)$$

on a la formule

$$P(p; a, b) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}.$$

Quelle est la limite de $P(p; a, b)$ pour $p \rightarrow \frac{1}{2}$?

- (e) On a $\mathbb{E}[S_T] = (p - q) \mathbb{E}[T]$. En déduire une expression pour $\mathbb{E}[T]$ dans le cas où $p \neq q$.