

**Licence de Mathématiques**  
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 2

2006

1. (*Mesure de Dirac*) Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ne prenant que les valeurs 0 et 1. Démontrer que c'est une mesure de Dirac.
2. (*Mesure de comptage*) Soit  $\mu = \mu_{\text{card}}$  la mesure de comptage sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .
  - (a) Expliciter  $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$  pour  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ .
  - (b) En déduire que pour toute suite double  $(a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  de réels positifs, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \right).$$

- (c) Soit  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Expliciter la condition pour que  $f$  soit  $\mu$ -intégrable.
3. (*Mesure de Lebesgue*) Soit  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) Tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $B \subset [0, 1]$  et  $\lambda(B) = 1$  est dense dans  $[0, 1]$ .
  - (b) Tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $B \subset [0, 1]$  et dense dans  $[0, 1]$ , est de mesure de Lebesgue égale à 1.
  - (c) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$ , dense dans  $\mathbb{R}$  et tel que  $\lambda(U) \leq \varepsilon$ .
  - (d) Pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $\lambda(B) < \infty$ , la fonction  $x \mapsto \lambda(B \cap ]-\infty, x])$  est continue.
  - (e) Deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  égales  $\lambda$ -presque partout sont égales partout.
  - (f) Il n'existe pas de fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui coïncide presque partout avec la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui vaut 0 pour  $x < 0$  et 1 pour  $x \geq 0$ .
4. (*Fonctions de répartition*)

- (a) Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On pose

$$F(t) = \mu(]-\infty, t]), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une *fonction de répartition* sur  $\mathbb{R}$ , c.à.d.

- i)  $F$  est croissante;
    - ii)  $F(-\infty) := \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$  et  $F(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$ ;
    - iii)  $F$  est continue à droite avec existence de limites à gauche.
  - (b) Inversement, étant donnée une fonction  $F$  de répartition sur  $\mathbb{R}$ , montrer qu'il existe une unique mesure  $\mu$  de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que pour tout  $a, b$  tels que  $-\infty \leq a < b < \infty$ , on ait

$$\mu([a, b]) = F(b) - F(a).$$

5. (*Complétion d'un espace mesuré*) Soit  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré. On définit

$$\mathcal{M}_{\mu} := \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{M} \text{ tel que } A \subset E \subset B \text{ et } \mu(B \setminus A) = 0\};$$

alors  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mu}$ . Pour  $E \in \mathcal{M}_{\mu}$  on pose  $\mu'(E) = \mu(A)$ . Montrer que  $\mathcal{M}_{\mu}$  est une tribu et  $\mu'$  une mesure sur  $\mathcal{M}_{\mu}$  qui coïncide avec  $\mu$  sur  $\mathcal{M}$ .

6. (*Caractérisation de l'intégrabilité*) Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $(X, \mathcal{M})$  et  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une application mesurable, finie presque partout. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a)  $f$  est  $\mu$ -intégrable; (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f| > n\}} |f| d\mu = 0$ ;  
(c)  $\sum_{n \geq 1} n \mu\{n < |f| \leq n+1\} < \infty$ ; (d)  $\sum_{n \geq 0} \mu\{|f| > n\} < \infty$ .

7. (*Lemme de factorisation*) Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace mesurable et  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$  une application mesurable. On pose  $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ . Alors  $\mathcal{A}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{M}$ . Montrer que les fonctions  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont  $\mathcal{A}$ -mesurables sont exactement les fonctions qui s'écrivent  $f = h \circ \varphi$  où  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est borelienne.

8. (*Intégration par rapport à une mesure image*) Soit  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré,  $(E, \mathcal{E})$  une espace mesurable et  $\varphi: X \rightarrow E$  une application mesurable. Pour  $B \in \mathcal{E}$  on pose  $(\varphi_*\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ .

- (a) Montrer que  $\varphi_*\mu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{E})$  qu'on appelle *mesure image* de  $\mu$  par  $\varphi$ .  
(b) Soit  $f: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable. Montrer que  $f$  est  $\varphi_*\mu$ -intégrable si et seulement si  $f \circ \varphi: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est  $\mu$ -intégrable et que dans ce cas, on a

$$\int_E f d(\varphi_*\mu) = \int_X (f \circ \varphi) d\mu.$$

9. (*Intégration par rapport à une mesure à densité*) Soit  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré et  $h: X \rightarrow [0, \infty]$  une application mesurable. Pour tout  $A \in \mathcal{M}$  on pose  $\nu(A) = \int_A h d\mu$ .

- (a) Montrer que  $\nu$  est une mesure sur  $(X, \mathcal{M})$ . On dit que la mesure  $\nu$  admet  $h$  pour *densité* par rapport à  $\mu$ ; on note  $\nu = h \cdot \mu$  ou encore  $d\nu = h d\mu$ .  
(b) Pour  $A \in \mathcal{M}$ , vérifier que si  $\mu(A) = 0$  alors  $\nu(A) = 0$ . On dit que  $\nu$  est *absolument continue* par rapport à  $\mu$ .  
(c) Soit  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable. Montrer que  $f$  est  $\nu$ -intégrable si et seulement si  $fh$  est  $\mu$ -intégrable sur  $X$  et que dans ce cas, on a

$$\int_X f d\nu = \int_X fh d\mu$$

où  $fh$  désigne l'application définie sur  $X$  par  $(fh)(x) = f(x)h(x)$ .

10. Soit  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers  $f$  et telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_X f_n d\mu \leq M$$

où  $M$  est une constante donnée. Montrer que  $f$  est  $\mu$ -intégrable et que  $\int_X f d\mu \leq M$ .

11. Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  à l'aide de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  et du théorème de la convergence monotone.