

**Licence de Mathématiques**  
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 5

2006

1. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application mesurable; si  $f$  est positive ou intégrable, par un changement de variables, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x-y) e^{-(x+y)} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-|u|} du.$$

2. (*Fonction gamma et fonction bêta d'Euler*) On pose pour  $a > 0$  et  $b > 0$ :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Les fonctions  $\Gamma$  et  $B$  s'appellent respectivement *fonction gamma* et *fonction bêta d'Euler*.

(a) Justifier que  $\Gamma(a)$  et  $B(a, b)$  sont bien définies.

(b) Montrer que, pour toute fonction mesurable  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  positive,

$$\int_{]0, \infty[^2} f(u+v) u^{a-1} v^{b-1} \lambda(du, dv) = B(a, b) \int_0^\infty t^{a+b-1} f(t) dt.$$

*Indication:* On effectuera le changement de variables  $\phi(u, v) = \left(u+v, \frac{u}{u+v}\right)$ .

En déduire l'identité

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) B(a, b).$$

(c) Déduire  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$  et  $\Gamma(n+1)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

(d) En faisant le changement de variable  $t = u/(1+u)$ , établir que

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du$$

et en déduire que, pour tout  $a \in ]0, 1[$ , on a

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du = \Gamma(a) \Gamma(1-a).$$

3. (*Calcul du volume de la boule euclidienne unité*) Soit  $V_n$  le volume de la boule euclidienne unité  $B_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ .

(a) Calculer  $V_1$  et  $V_2$ .

(b) Pour  $n \geq 3$ , établir que  $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$ .

(c) En déduire  $V_n$ .

*Indication:* On remarquera que

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \iff x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 \text{ et } x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2.$$

4. (Calcul de l'intégrale de Dirichlet) Soient  $a > 0$ ,

$$\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n < a \text{ et } x_i > 0\}$$

et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in ]0, \infty[^n$ . On appelle *intégrale de Dirichlet* l'intégrale suivante

$$I_n(a) = \int_{\Delta_n(a)} x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} \lambda_n(dx_1, \dots, dx_n).$$

- (a) Vérifier que  $I_n(a) = a^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} I_n(1)$ .
- (b) Établir pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $I_n(1) = I_{n-1}(1) B(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1, \alpha_n)$ .
- (c) En déduire la valeur de  $I_n(a)$ .

5. (Inversion limite intégrale et convergence uniforme)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications intégrables de  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  dans  $\mathbb{R}$  où  $\mu$  est une mesure finie.

- (a) Montrer que si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ , alors  $f$  est intégrable et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ .
- (b) Le résultat subsiste-t-il si  $\mu$  n'est plus supposée finie ?

6. Soit  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espace mesuré et soient  $f, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des fonctions mesurables positives intégrables. On suppose que  $f_n \rightarrow f$  p.p. et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ .

En déduire que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1(\mu)$ , c.à.d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ .

7. On suppose que la mesure  $\mu$  est finie sur l'espace mesurable  $(X, \mathcal{M})$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications mesurables de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $f_n \rightarrow 0$  en mesure, c.à.d. pour tout  $\varepsilon > 0$ , la mesure de  $\{|f_n| > \varepsilon\}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ ;
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} d\mu = 0$ .

8. On considère un espace mesuré  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  où  $0 < \mu(X) < \infty$ , et une fonction intégrable  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que  $f(x) \geq \varepsilon$  pour tout  $x \in X$ .

- (a) Montrer que  $\ln f$  et  $f^\alpha$  sont des fonctions intégrables pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .
- (b) Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $F(\alpha) = \int f^\alpha d\mu$ .

i. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, 1/2[$ .

ii. En déduire  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\mu(X)} \int f^\alpha d\mu \right)^{1/\alpha}$ .