

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 6

2006

1. (a) On considère pour $a > 0$ la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_a(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$.
Déterminer $f_a * f_b$.

- (b) On considère pour $a > 0$ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right).$$

Montrer que $g_a * g_b = g_{a+b}$.

- (c) Soit $s > 0$ fixé. On considère pour $a > 0$ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma_a(x) = \frac{s^a}{\Gamma(a)} e^{-sx} x^{a-1} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Montrer que $\gamma_a * \gamma_b = \gamma_{a+b}$.

2. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré.

- (a) Soit $f: X \rightarrow [0, \infty]$ mesurable. Montrer que si $\mu(X) = +\infty$, alors f et $1/f$ ne peuvent être intégrables simultanément.
- (b) Soit $\mu(X) < +\infty$. Trouver la valeur minimum de

$$\left(\int_X f \, d\mu\right) \left(\int_X \frac{1}{f} \, d\mu\right)$$

lorsque f décrit l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles positives. Pour quelles fonctions ce minimum est-il atteint ?

3. Montrer que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx)$ alors les deux inégalités suivantes sont incompatibles :

$$\int_0^1 (f(x) - e^x)^2 dx \leq \frac{1}{4}; \quad \int_0^1 (f(x) - e^{-x})^2 dx \leq \frac{1}{4}.$$

4. (*Inégalité de Hölder généralisée*)

Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et soient $p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$ tels qu'on ait $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ (avec la convention $1/\infty = 0$). Soient f_1, \dots, f_n des fonctions réelles mesurables sur X .

- (a) Montrer qu'on a :

$$\|f_1 \cdot \dots \cdot f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$

- (b) En déduire que si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}$, le produit $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ est élément de l'espace \mathcal{L}^1 .

5. (*Inégalité de Hardy*) Soit $1 < p < \infty$ et $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(]0, \infty[, \mathcal{B}(]0, \infty[), \lambda)$.

À tout $f \in \mathcal{L}^p$ on associe l'application F définie sur $]0, \infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

(a) On suppose que f est positive, continue sur $]0, \infty[$ et à support compact dans $]0, \infty[$.

i. Montrer que F est bien définie et appartient à \mathcal{L}^p .

ii. Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$ et $xF'(x) + F(x) = f(x)$.

iii. En remarquant que $F(x)^p = F(x)^{p-1} f(x) - xF(x)^{p-1} F'(x)$ et en utilisant une intégration par parties, déduire que

$$\int_0^\infty F(x)^p dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F(x)^{p-1} f(x) dx.$$

iv. Établir alors l'inégalité de Hardy:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

(b) Étendre l'inégalité de Hardy au cas où f est une fonction de $\mathcal{L}^p(]0, \infty[)$.

(c) Montrer que si $p = 1$ et $f \in \mathcal{L}^1(]0, \infty[)$, alors F n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{L}^1(]0, \infty[)$.

6. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré de mesure finie.

(a) Pour $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$, montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Le résultat reste-t-il valable si $\|f\|_\infty = \infty$, c.à.d. si f n'appartient pas à $\mathcal{L}^\infty(X)$?

(b) Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ telle que $\|f\|_\infty > 0$. On pose $I_n = \int_X |f|^n d\mu$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \|f\|_\infty.$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f_n = \mathbf{1}_{[n2^{-m}-1, (n+1)2^{-m}-1[}$$

où m est l'unique entier tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$.

(a) Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans $L^p([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[, \lambda)$ vers la fonction nulle.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge en aucun point de $[0, 1[$.

8. On considère la suite de fonctions

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n = n \mathbf{1}_{\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]}.$$

(a) Étudier les convergences presque partout, dans $L^p([0, 1], \mathcal{B}([0, 1], \lambda))$ pour $1 \leq p \leq \infty$, et en mesure de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.

(b) La fonction $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ appartient-elle à $L^p([0, 1], \mathcal{B}([0, 1], \lambda))$?