

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 7

2006

1. (*Polynômes orthogonaux*) Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non-vide, borné ou non dans \mathbb{R} . On se donne un poids sur I , c.à.d. une fonction $h: I \rightarrow]0, +\infty]$ continue. On note $\mu(dx) = h(x)dx$ la mesure sur I de densité h par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $x \mapsto x^n$ est μ -intégrable, c.à.d. $\int_a^b |x|^n h(x)dx < \infty$. Considérons l'espace $L^2(I, \mu)$ muni le produit scalaire naturel

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) h(x)dx.$$

Sous les hypothèses faites, $L^2(I, \mu)$ contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes. Montrer les propriétés suivantes :

- (a) Il existe une suite de polynômes unitaires $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\deg P_n = n$, orthogonaux 2 à 2 pour le produit scalaire de $L^2(I, \mu)$. Cette suite est unique. La suite normalisée $\tilde{P}_n := \frac{P_n}{\|P_n\|_2}$ est une base orthonormée de l'espace \mathcal{P} des polynômes.
- (b) Les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence

$$P_n(x) = (x - \lambda_n) P_{n-1}(x) - \mu_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

$$\text{avec } \lambda_n = \frac{\langle x P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|_2^2}, \quad \mu_n = \frac{\|P_{n-1}\|_2^2}{\|P_{n-2}\|_2^2}.$$

- (c) Pour tout poids h sur I , le polynôme P_n possède n zéros distincts dans l'intervalle I .
2. (*Polynômes de Legendre*) Soit $I =]-1, 1[$ et $h(x) = 1$.

- (a) Montrer que les polynômes de Legendre L_n ,

$$L_n(x) := \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

sont unitaires de degré n , et 2 à 2 orthogonaux dans $L^2(I, dx)$.

- (b) On pose $\tilde{L}_n = \frac{L_n}{\|L_n\|_2}$. Montrer que $(\tilde{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2(I, dx)$.

3. (*Polynômes de Tchebychev*) Soit $I =]-1, 1[$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- (a) On définit les polynômes de Tchebychev T_n par

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \quad x \in]-1, 1[.$$

Montrer qu'en effet T_n est un polynôme de degré n et que les T_n sont 2 à 2 orthogonaux dans $L^2(I, \mu)$ avec $\mu = h(x)dx$. En plus,

$$P_0(x) = T_0(x) \quad \text{et} \quad P_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad \text{si } n \geq 1,$$

sont des polynômes unitaires.

(b) On pose $\tilde{P}_n = \frac{P_n}{\|P_n\|_2}$. Montrer que $(\tilde{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2(I, \mu)$.

4. (*Polynômes de Laguerre*) Soit $I =]0, \infty[$ et $\mu(dx) = e^{-x}dx$.

(a) Montrer que

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

est un polynôme unitaire de degré n , et que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale dans $L^2(I, \mu)$.

(b) On pose $\tilde{L}_n = \frac{L_n}{\|L_n\|_2}$. Montrer que $(\tilde{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2(I, \mu)$.

5. (*Polynômes d'Hermite*) Soit $I = \mathbb{R}$ et $\mu(dx) = e^{-x^2/2}dx$. Montrer que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

est un polynôme unitaire de degré n . En plus, la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale dans $L^2(I, \mu)$ et la suite $\tilde{H}_n = \frac{H_n}{\|H_n\|_2}$ est une base orthonormale de $L^2(I, \mu)$.