

Licence de Mathématiques
MATH 6L20, Intégration probabilités

Feuille de TD n° 9

2006

1. (*Indépendance*)

- (a) Soit X_1, \dots, X_n une suite finie de v.a. indépendantes et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une suite finie de fonctions mesurables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\varphi_i \circ X_i \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrer qu'on a alors

$$\prod_{i=1}^n |\varphi_i \circ X_i| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

et que

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n (\varphi_i \circ X_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\varphi_i \circ X_i).$$

- (b) Soit X une v.a. et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que X et $\varphi \circ X$ sont indépendantes si et seulement si $\varphi \circ X$ est constante presque sûrement.
- (c) Soient X_1, \dots, X_n indépendantes. Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ est constante presque sûrement si et seulement si tout X_i est constante presque sûrement.
2. Soient X_1, X_2 indépendantes et de lois de Poisson avec les paramètres λ_1 et λ_2 :

$$\mathbb{P}(X_i = k) = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2).$$

Alors on a :

- a) $X = X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- b) La loi $\mathbb{P}(X_1 = k | X = n)$ de X_1 conditionnelle à $\{X = n\}$ est la loi binômiale avec les paramètres $p = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$ et n .
3. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , telle que pour tout n dans \mathbb{N} on ait $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, les deux propriétés sont équivalentes :
- a) X suit la loi de Poisson de paramètre λ ;
- b) Pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.
4. Soient $X_1, X_2: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ des v.a. indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = C_n^k 2^{-n}$$

pour tous les k, n avec $0 \leq k \leq n$.

Alors X_1 et X_2 suivent des lois de Poisson avec le même λ .

Indication: Vérifier la propriété suivante et utiliser ensuite Ex 3:

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 = n \mid X_1 + X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 = n-1 \mid X_1 + X_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = n) \mathbb{P}(X_2 = 0)}{\mathbb{P}(X_1 = n-1) \mathbb{P}(X_2 = 1)} = \frac{1}{n}.$$

5. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* . Montrer que les deux propriétés sont équivalentes :
 - a) X suit une loi géométrique;
 - b) $\mathbb{P}(X > k+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$ pour tous les $n, k \in \mathbb{N}^*$ (“ X est *sans mémoire*”).
6. Soit X une v.a. non négative avec une densité continue. Montrer que les deux propriétés sont équivalentes :
 - a) X suit une loi exponentielle;
 - b) X est *sans mémoire*, c.a.d. on a $\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$, $\forall s, t \geq 0$.
7. (a) Soient les v.a. X_1, \dots, X_n indépendantes et suivant des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer qu'alors $X := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ suit aussi une loi exponentielle. Quel est son paramètre ?

(b) Vous êtes avec votre auto devant un parking plein avec 50 places, dans lesquelles les autos sont déposées pour 60 minutes en moyenne. Vous devez maintenant vous décider : vous attendez qu'une place se libère ou vous conduisez jusqu'au prochain parking, où il est sûr qu'il y a des places libres, mais qui est éloigné de 10 minutes de votre destination.
8. (a) Les v.a. X_1, \dots, X_n sont indépendantes et suivent une loi exponentielle avec le paramètre constant λ . Alors $X := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ possède la densité :

$$p(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}, \quad x \geq 0.$$

(b) On vérifie :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Indication : Évaluer l'intégrale $\int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda x})^n] dx$ par changement de variable $u = 1 - e^{-\lambda x}$ et utiliser ensuite la formule : $(1 - u^n)/(1 - u) = 1 + u + \dots + u^{n-1}$.

- (c) Un professeur de sport attend que ses 30 élèves changent de tenue. Les temps pour se changer sont indépendants et suivent une loi exponentielle avec une espérance de 5 minutes. Estimer après combien de minutes en moyenne le professeur pourra commencer son cours. (On a approximativement : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n$).
9. Deux entrepreneurs veulent se rencontrer à un certain endroit entre 20h00 et 21h00. Durant cette heure, ils arrivent de manière aléatoire et indépendamment l'un de l'autre. Aucun des deux n'est prêt à attendre plus de 10 minutes l'autre.
 - (i) Avec quelle probabilité le rendez-vous aura-t-il lieu ?
 - (ii) Combien de temps chacun doit-il être prêt à attendre l'autre, pour que la probabilité de se rencontrer soit au moins de 70 % ?
 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{N}(0, 1)$. Le couple (X, Y) étant considéré comme les coordonnées d'un point aléatoire du plan, on passe en coordonnées polaires : $R^2 = X^2 + Y^2$, $\tan \Theta = Y/X$.
 - (a) Déterminer la loi conjointe de (R, Θ) et en déduire que R et Θ sont indépendantes.
 - (b) Montrer que R^2 suit une loi exponentielle et que $\tan \Theta$ suit une loi de Cauchy.
 - (c) Calculer

$$\mathbb{E}(R), \quad \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{R^2}\right), \quad \mathbb{E}\left(\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}\right).$$