

M1 – Master Recherche Science et Technologie
MATH 2M06, Probabilités et statistiques

Devoir à rendre le Mercredi 29 mars

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi, telle que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ et $\sigma^2 \equiv \text{var}(X_1) > 0$. On pose $\alpha = \mathbb{E}[X_1]$. Montrer que

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \leq t \right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \alpha \\ 1 & \text{si } t > \alpha \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \alpha. \end{cases}$$

$$(b) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\alpha}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ p.s.}$$

2. Soit X une v.a. bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}[|X|^{1/n}]^n \rightarrow \exp(\mathbb{E}[\log |X|]), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

3. Soient X et Y deux v.a. dans $L^1(P)$. Montrer les conditions suivantes:

- (a) Si X, Y sont i.i.d., alors on a

$$\mathbb{E}[X | \sigma\{X + Y\}] = \mathbb{E}[Y | \sigma\{X + Y\}] = \frac{X + Y}{2} \quad \text{p.p.}$$

- (b) Si $\mathbb{E}[X | \sigma\{Y\}] = Y$ et $\mathbb{E}[Y | \sigma\{X\}] = X$, alors $X = Y$ p.p.

Indication: Considérer $\mathbb{E}[(X - Y)1_{\{X > c, Y \leq c\}}] + \mathbb{E}[(X - Y)1_{\{X \leq c, Y > c\}}]$.

4. (a) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. réelles telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ et

$$Z_n = (X_1 + \dots + X_n)^2 - n \mathbb{E}[X_1^2].$$

Montrer que $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une martingale.

- (b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. Pour $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$Z_n = (\cos \lambda)^{-n} \exp \{i\lambda(X_1 + \dots + X_n + \alpha)\}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une martingale complexe, c.à.d. la partie réelle et la partie imaginaire de Z_n sont des martingales.