

M1 – Master Recherche Science et Technologie
MATH 2M06, Probabilités et statistiques

Feuille de TD n° 1

2006

1. (*Fonctions caractéristiques de lois classiques*) Soit X une variable aléatoire réelle de loi P_X et soit φ_X la fonction caractéristique de X ,

$$\varphi_X(t) = \hat{P}_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculer les fonctions caractéristiques pour les lois classiques suivantes :

- (a) *Loi uniforme* $\mathcal{U}(1, \dots, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k$ sur $\{1, \dots, n\}$.
- (b) *Loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(1, p) = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ de paramètre $p \in [0, 1]$.
- (c) *Loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$ de paramètres $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- (d) *Loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$ de paramètre $\lambda > 0$.
- (e) *Loi géométrique* $\mathcal{G}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \delta_k$ de paramètre $p \in]0, 1]$.
- (f) *Loi uniforme* $\mathcal{U}([a, b]) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x) dx$ sur $[a, b]$ avec $a < b$.
- (g) *Loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0, \infty[}(x) dx$ de paramètre $\lambda > 0$.
- (h) *Loi de Cauchy* $\mathcal{C}(c) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2} dx$ de paramètre $c > 0$.
- (i) *Loi de Gauss* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$ de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$.
- (j) *Loi Gamma* $\gamma(a, p) = \frac{p^a}{\Gamma(a)} e^{-px} x^{a-1} 1_{\{x>0\}}(x) dx$ de paramètres $a > 0$ et $p > 0$.

2. (*Vrai ou faux ?*)

Il existe des v.a. X et Y indépendantes et de même loi, telles que $P_{X-Y} = \mathcal{U}([-1, 1])$.

3. (*Loi symétrique*)

- (a) Soit X une variable aléatoire. Montrer que φ_X est à valeur réelles si et seulement si X a une loi symétrique, i.e. $P_X = P_{-X}$.
- (b) Montrer que si X et Y sont des v.a. indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique.

4. (*Loi triangulaire*) Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_X(x) = (1-|x|) 1_{[-1,1]}(x)$. Montrer que $\varphi_X(t) = 2(1 - \cos t)/t^2$.

Indication: Soient U et V des v.a. indépendantes uniformes sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; considérer $U + V$.

5. (*Transformée de Mellin*) Soit X une v.a. positive. Sa *transformée de Mellin* est la fonction

$$T_X(\theta) = \mathbb{E}[X^\theta]$$

pour toutes les valeurs de θ pour lesquelles l'espérance de X^θ existe.

- (a) Montrer que $T_X(\theta) = \varphi_{\log X}(\theta/i)$ quand les deux membres sont bien définis.
- (b) Montrer que si X et Y sont indépendantes et positives, on a $T_{XY}(\theta) = T_X(\theta) T_Y(\theta)$.
- (c) Montrer que $T_{bX^a}(\theta) = b^\theta T_X(a\theta)$ pour $b > 0$ et $a\theta$ dans le domaine de définition de T_X .
- (d) Trouver la transformée de Mellin d'une v.a. lognormale X de paramètres (μ, σ^2) . Utiliser le fait que $T_X(k) = \mathbb{E}[X^k]$ pour calculer le k -ième moment de X pour $k = 1, 2, \dots$

6. (*Loi de Laplace*) Soient X_1 et X_2 deux v.a. réelles indépendantes de même *loi de Laplace*, c.à.d. $P_{X_i}(dx) = \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$. Notons $\varphi = \varphi_{X_i}$ la fonction caractéristique de X_i . On définit les variables aléatoires Y_1 et Y_2 par $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Montrer les conditions suivantes:

- (a) On a $\varphi(t) = (1 + t^2)^{-1}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont même fonction caractéristique; donc même loi. Elles sont non corrélées; elles ne sont pas indépendantes.
7. (*Fonction caractéristique d'un produit de variables aléatoires indépendantes*) Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes.

- (a) Démontrer que la fonction caractéristique du produit XY est donnée par

$$\varphi_{XY}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(ty) dP_Y(y), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si de plus X et Y ont même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer la fonction φ_{XY} .

- (b) Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des v.a. réelles indépendantes, de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X_1X_2 + X_3X_4$ suit une loi de Laplace et que $|X_1X_2 + X_3X_4|$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1.
8. (*On peut avoir $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ sans que les v.a. X et Y soient indépendantes*) Soient U et V deux v.a. indépendantes de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ de paramètre 1 et soient a, b, c, d des nombres réels strictement positifs. Considérons les v.a. X et Y définies par

$$X = aU + bV, \quad Y = cU + dV.$$

- (a) Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y) et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
- (b) Calculer la fonction caractéristique φ_{X+Y} de $X + Y$ et en déduire l'égalité des lois $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.