

M1 – Master Recherche Science et Technologie
MATH 2M06, Probabilités et statistiques

Feuille de TD n° 2

2006

-
1. (*Lois de sommes de v.a. indépendantes*) Soient X_1, \dots, X_n des v.a. indépendantes. Donner la loi de $Y := X_1 + \dots + X_n$ dans les cas suivants :
 - (a) $X_k \sim \mathcal{B}(n_k, p)$, $k = 1, \dots, n$.
 - (b) $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$, $k = 1, \dots, n$.
 - (c) $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \dots, n$.
 - (d) $X_k \sim \gamma(a_k, p)$, $k = 1, \dots, n$.
 - (e) $X_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $k = 1, \dots, n$.
 2. (*Combinaisons linéaires de gaussiennes*)
Soient X_1, \dots, X_n des v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et considérons les v.a. définies par $Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ et $Z = b_1 X_1 + \dots + b_n X_n$ où $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
 - (a) Montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ si et seulement si $\|a\| = 1$.
 - (b) Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si $a \perp b$.
 3. (*Carrés de gaussiennes – lois du chi-deux*)
 - (a) Soit X une v.a. gaussienne centrée réduite. La loi de X^2 est appelée *loi du chi-deux à un degré de liberté* et notée $\chi^2(1)$. Montrer que $\chi^2(1) = \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
 - (b) Soient X_1, \dots, X_n des v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes. La loi de $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ est appelée *loi du chi-deux à n degrés de liberté* et notée $\chi^2(n)$. Montrer que $\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.
 4. (*Signe aléatoire*) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et ε une v.a. de loi de Bernoulli, indépendante de X , telle que $P\{\varepsilon = 1\} = P\{\varepsilon = -1\} = \frac{1}{2}$.
 - (a) Montrer que $X \sim \varepsilon X$ et calculer $\text{cov}(X, \varepsilon X)$.
 - (b) X et εX sont-elles indépendantes ?
 - (c) Montrer que $(X, \varepsilon X)$ n'est pas gaussien. Conclusion ?
 5. (*Somme d'un nombre aléatoire de v.a. indépendantes*)
Soit X_1, X_2, \dots une suite infinie de v.a. réelles indépendantes de même loi, et N une v.a. à valeurs entières, indépendante de X_i . Supposons que $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ et $\mathbb{E}[N] < \infty$. On pose
$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad S_N = X_1 + \dots + X_N,$$
avec la convention que $S_N = 0$ sur l'ensemble où $N = 0$.
 - (a) Montrer que $\varphi_{S_N}(t) = \mathbb{E}[\varphi_{X_i}(t)^N]$.
 - (b) En déduire que $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_i]$.

6. (*Moyenne empirique et variance empirique*)

Soient X_1, \dots, X_n des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Posons

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2.$$

(Les v.a. \bar{x} et S^2 sont connues sous le nom de « *moyenne empirique* » et « *variance empirique* » respectivement.)

(a) Trouver la fonction caractéristique de $(\bar{x}, X_1 - \bar{x}, \dots, X_n - \bar{x})$.

(b) En déduire que \bar{x} et S^2 sont indépendantes.

7. (*Fonction caractéristique et support de loi*)

Soit X une v.a. réelle de fonction caractéristique φ_X .

(a) Démontrer que s'il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t_0)| = 1$, alors la loi de X est discrète; plus précisément, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_X \left\{ a + \mathbb{Z} \frac{2\pi}{t_0} \right\} = 1.$$

(b) S'il existe deux réels t_1 et t_2 non nuls tels que t_1/t_2 soit irrationnel et tels que $|\varphi_X(t_1)| = |\varphi_X(t_2)| = 1$, alors la loi de X est dégénérée, c.à.d. que X est P -p.s. égale à une constante.

8. (*Critère d'indépendance de v.a. bornées*) Soient X et Y deux v.a. réelles bornées.

Démontrer que pour que X et Y soient indépendantes, il faut et il suffit que

$$\mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k] \mathbb{E}[Y^\ell], \quad \forall k, \ell = 0, 1, \dots$$

9. (*Fonctions caractéristiques et développements asymptotiques*)

Soit X une v.a. réelle de fonction caractéristique φ_X .

(a) Montrer que si $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ pour un entier n , on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t),$$

où $|\varepsilon_n(t)| \leq 3\mathbb{E}|X|^n$ et $\varepsilon_n(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$.

(b) Montrer que si $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ pour tout entier $n \geq 1$ et si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mathbb{E}|X|^n)^{1/n}}{n} = \frac{1}{t_0} < \infty$, alors on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n], \quad \forall |t| < t_0.$$

De plus, la loi de X est uniquement déterminée par les moments $\mu_n := \mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(*Indication:* $\varphi_X(t+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}[X^n e^{ihX}]$, $\forall |t| < t_0$).