

**M1 – Master Recherche Science et Technologie**  
**MATH 2M06, Probabilités et statistiques**

Feuille de TD n° 3

2006

1. (*La propriété d'être un vecteur gaussien est plus forte que le fait que chaque composante soit gaussienne*) Soit  $X$  une v.a.  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $a > 0$ . Posons

$$Y = X1_{\{|X| \leq a\}} - X1_{\{|X| > a\}}.$$

- (a) Montrer que  $Y$  est aussi de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  
(b) Montrer que  $(X, Y)$  n'est pas gaussienne.
2. (*Une transformée non linéaire de v.a. gaussiennes peut être gaussienne*)  
Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois v.a. réelles indépendantes, gaussiennes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que

$$\frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

3. (*Un vecteur non-gaussien dont les densités conditionnelles sont gaussiennes*)  
Soit  $(X, Y)$  une v.a. de densité sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c e^{-(1+x^2)(1+y^2)},$$

où  $c$  est choisi de manière à ce que  $f$  soit effectivement une densité. Montrer que le couple  $(X, Y)$  n'est pas gaussien, mais que les densités conditionnelles  $f_{X=x}$  et  $f_{Y=y}$  sont des densités gaussiennes.

4. (*Caractérisation des lois gaussiennes sur  $\mathbb{R}$* ) Soit  $X$  une v.a. réelle telle que  $\mathbb{E}[X] = 0$  et  $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 > 0$ . Soit  $Y$  une v.a. indépendante de  $X$  et de même loi.  
Montrer les conditions suivantes:

- (a) Si  $X$  est  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , alors  $(X + Y)/\sqrt{2}$  est  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .  
(b) Si  $X$  et  $(X + Y)/\sqrt{2}$  ont même loi, alors  $X$  est  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .
5. (*Forme quadratique d'une v.a. gaussienne*)  
Soit  $X$  de loi  $\mathcal{N}(\mu, C)$  sur  $\mathbb{R}^d$  avec  $\det C > 0$ . Montrer que

$$(X - \mu)^* C^{-1} (X - \mu) \text{ suit la loi } \chi^2(d).$$

6. (*La norme carré d'une v.a. gaussienne*)  
Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $d$ , de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, I_E)$ . Soit  $a$  un vecteur unitaire de  $E$  et  $U$  et  $V$  les v.a. réelles définies par

$$U = \langle X, a \rangle \quad \text{et} \quad V = \|X\|^2 - \langle X, a \rangle^2.$$

- (a) Démontrer que  $U$  et  $V$  sont indépendantes et identifier leur loi.

(b) Soit  $Y$  une v.a. à valeurs dans  $E$  de loi  $\mathcal{N}(\mu, I_E)$ , où  $\mu \in E$ . Dédurre que la loi de  $\|Y\|^2$  est la convolution d'un chi-deux à  $d - 1$  degrés de liberté et de la loi du carré d'une gaussienne réelle de loi  $\mathcal{N}(\|\mu\|, 1)$ .

7. (*Moyenne empirique et variance empirique*; voir Ex. 6 feuille de TD n° 2)

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Posons

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2.$$

Montrer que  $(n-1)S^2/\sigma^2$  admet la loi  $\chi^2(n-1)$  et que  $n\bar{x}^2/\sigma^2$  admet la loi  $\chi^2(1)$ .

*Indication :* Utiliser  $\sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2$ .