

M1 – Master Recherche Science et Technologie
MATH 2M06, Probabilités et statistiques

Feuille de TD n° 4

2006

1. (*Convergence en loi des variables normales*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, et supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Montrer que les suites μ_n et σ_n^2 ont des limites $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \geq 0$, et que X est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. (*Convergence en loi et convergence de densités*) Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d et admettant les densités f_n et f . Montrer que, si la suite f_n converge vers f presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d), alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
3. (*Théorème de Slutsky*)
Soient X_n des v.a. convergeant en loi vers X , et Y_n des v.a. convergeant en probabilité vers une constante c , toutes ces v.a. étant définies sur le même espace. Montrer que

$$(a) \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX, \quad \text{et} \quad (b) \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{c} \quad \text{si } c \neq 0.$$

4. (*Convergence en loi de sommes de v.a.*)
Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de v.a. réelles définies sur le même espace.
 - (a) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{P} 0$, montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
 - (b) On suppose que X_n et Y_n sont indépendantes pour tout n et que X est indépendante de Y . Montrer que, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$.
 - (c) Montrer que (b) devient faux si on supprime l'hypothèse "pour tout n , les variables X_n et Y_n sont indépendantes".
5. (*Une limite presque sûrement*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(1, 3)$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} = \frac{1}{4} \quad \text{p.s..}$$

6. (*Jeu de la roulette et théorème limite central*)
La probabilité de gagner une partie au jeu de la roulette est de $19/37$ (on se place du point de vue du casino) et la mise d'un joueur à une partie est d'un euro. Quel est approximativement le nombre minimum n_0 de parties qui doivent être jouées journalièrement pour que le casino gagne avec une probabilité $1/2$ au moins 1000 euros par jour ? Quelle est la probabilité d'une perte globale pour le casino durant ces n_0 parties ?
7. (*Une application non probabiliste du théorème limite central*)
Utiliser le théorème limite central pour montrer que

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: 0 \leq k \leq n+t\sqrt{n}} \frac{n^k e^{-n}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx.$$

Indication: Considérer une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

8. (*Théorème limite central pour des variables de Poisson*) Soit X^λ une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $(X^\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge en loi vers une v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

9. (*Théorème limite central pour une somme d'un nombre aléatoire de v.a.*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi, centrées, de variance σ^2 . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit $(N_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendantes de la suite (X_n) . Montrer que si $N_n \rightarrow +\infty$ p.s. quand $n \rightarrow \infty$, alors la suite

$$Z_n := \frac{S_{N_n}}{\sqrt{N_n}}$$

converge en loi vers une v.a. que l'on déterminera.

10. (*Développement décimal*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble des entiers $\{0, 1, \dots, 9\}$. On définit, pour tout $n \geq 1$, la v.a. $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k 10^{-k}$. Démontrer que la suite Z_n converge p.s. vers une v.a. Z dont on déterminera la loi.

11. (*Événements indépendants*)

Soit (X, \mathcal{M}, P) un espace probabilisé et $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements indépendants tels que $P(E_n) = 1/n$ pour tout n . On pose $N_n := 1_{E_1} + \dots + 1_{E_n}$. Montrer que la suite

$$\frac{N_n - \log n}{\sqrt{\log n}}$$

converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

12. (*What's fair about a fair game ?*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que

$$X_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{avec probabilité } n^{-2}, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - n^{-2}. \end{cases}$$

Montrer que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n , mais si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, alors $\frac{S_n}{n} \rightarrow -1$, p.s.

13. (*Variance empirique*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de carré intégrable, de moyenne $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$.

(a) On pose

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Calculer $\mathbb{E}[S_n^2]$, et montrer que $S_n^2 \rightarrow \sigma^2$ p.s., lorsque $n \rightarrow \infty$.

(b) Pour tout entier $n \geq 2$, on définit :

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2.$$

Calculer $\mathbb{E}[\hat{S}_n^2]$, et montrer que $\hat{S}_n^2 \rightarrow \sigma^2$ p.s., lorsque $n \rightarrow \infty$.

14. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 1$ et $\text{var}(X_1) = \sigma^2 \in]0, \infty[$. Montrer que

$$\frac{2}{\sigma} (\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad \text{où } Z \text{ est } \mathcal{N}(0, 1).$$

Indication :
$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{S_n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} (\sqrt{S_n} - \sqrt{n}).$$