

M1 – Master Recherche Science et Technologie
MATH 2M06, Probabilités et statistiques

Feuille de TD n° 5

2006

1. (*Transformation de sur-martingales*)

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. non-négatives et bornées, ε_n étant \mathcal{F}_{n-1} -mesurable pour tout $n \geq 1$ et ε_0 constante. On pose $Z_0 = X_0$, et pour $n \geq 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Montrer que la suite

$$Y_n = \varepsilon_0 Z_0 + \dots + \varepsilon_n Z_n$$

est une sur-martingale.

2. (*Martingale équidistribuée*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une sur-martingale telle que toutes les v.a. aient même loi.

(a) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une martingale.

(b) Montrer que, pour tout réel a , les suites $(X_n \wedge a)_{n \geq 1}$ et $(X_n \vee a)_{n \geq 1}$ sont des martingales.

(c) En déduire que, si $n > m$, sur l'ensemble $\{X_m \geq a\}$, X_n est p.s. supérieur ou égal à a .

(d) En déduire que $X_1 = \dots = X_n = \dots$ p.s.

3. (*Sommes de v.a. indépendantes, centrées et de carré intégrable*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes vérifiant pour tout n ,

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 := \text{var}(X_n) < \infty.$$

(a) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ converge p.s.}$$

(b) Soit $|X_n| \leq K$ pour tout n avec une constante K . Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ converge p.s.} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty.$$

(c) (*Signes aléatoires*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$ et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. En déduire de (a) et (b) que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ est p.s. convergente si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$.

4. (*Une preuve de la loi zéro-un de Kolmogorov à l'aide des martingales*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et \mathcal{A}_∞ la tribu asymptotique correspondante. Soit $A \in \mathcal{A}_\infty$.

(a) Montrer que $\mathbb{E}[1_A | \mathcal{F}_n] = P(A)$ pour tout n , où $\mathcal{F}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$.

(b) Montrer ensuite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[1_A | \mathcal{F}_n] = 1_A$ p.s., et en déduire que $P(A) \in \{0, 1\}$.

5. (*Temps d'atteinte pour les marches aléatoires simples*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de loi de Bernoulli valant $+1$ ou -1 avec probabilité $1/2$. On pose

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ et $T = \inf\{n \geq 1 \mid S_n = 1\}$.

- (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

est une martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_n) .

- (b) Montrer que T est un temps d'arrêt avec $T < +\infty$ p.s., mais $\mathbb{E}[T] = +\infty$.
 (c) En utilisant que $\mathbb{E}[M_{T \wedge n}^\theta] = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une formule pour $\mathbb{E}[\alpha^{-T}]$, où $\alpha = \cosh \theta$.
 (d) En déduire la loi de T .

6. (*L'urne de Polya*) Une urne contient des boules de deux couleurs différentes, des blanches et des rouges. Aux instants $n = 1, 2, \dots$, on tire une boule de l'urne, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire, de la même couleur. On note B_n (resp. R_n) le nombres de boules blanches (resp. rouges) à l'issue du n -ième coup. On sait que $B_0 = k$ et $R_0 = \ell$, et on pose

$$X_n = \frac{B_n}{B_n + R_n}.$$

- (a) Vérifier que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{B_0, \dots, B_n\}$.
 (b) Montrer que X_n converge p.s. vers une v.a. X_∞ lorsque $n \rightarrow \infty$.
 (c) Montrer que si $B_0 = 1$ et $R_0 = 1$, la loi de X_∞ est uniforme sur $[0, 1]$.
 (d) Soit $B_0 = R_0 = 1$ et $\beta_n := B_n - B_0$. Montrer que, pour tout $0 < \theta < 1$,

$$N_n^\theta = \frac{(n+1)!}{\beta_n!(n-\beta_n)!} \theta^{\beta_n} (1-\theta)^{n-\beta_n}, \quad n \geq 1,$$

est une martingale.

7. (*Martingales produit et le théorème de Kakutani*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite indépendante de variables positives vérifiant $\mathbb{E}[X_i] = 1$. On pose $M_0 = 1$ et $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$.
 (a) Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et que $M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ existe p.s.
 (b) On pose $a_n = \mathbb{E}\sqrt{X_n}$. Montrer que

$$M_\infty > 0 \text{ p.s. si et seulement si } \prod a_n > 0,$$

$$M_\infty = 0 \text{ p.s. si et seulement si } \prod a_n = 0.$$

8. (*Quotient de vraisemblance*) Pour une suite de v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ on sait que
 (H₀) $\forall n \geq 1, P_{(X_1, \dots, X_n)}(dx) = p_n(x) dx$ ou (H₁) $\forall n \geq 1, P_{(X_1, \dots, X_n)}(dx) = q_n(x) dx$.
 On pose

$$Z_n = \frac{q_n(X_1, \dots, X_n)}{p_n(X_1, \dots, X_n)}$$

(avec la convention que $Z_n = 0$ si le dénominateur s'annule).

- (a) Montrer que sous l'hypothèse (H₀), la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une martingale et p.s. convergente.
 (b) Montrer que si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est i.i.d. et si $p_1(t)dt \neq q_1(t)dt$, alors $Z_n \rightarrow 0$ p.s. sous l'hypothèse (H₀) (et par conséquent, sous l'hypothèse (H₁), $Z_n \rightarrow +\infty$ p.s.)