

**M1 – Master Recherche Science et Technologie**  
**MATH 2M06, Probabilités et statistiques**

Feuille de TD n° 7

2006

1. (*Visites à un état fixe et noyau potentiel*) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $P = (P(x, y))_{x, y \in E}$ , où  $E$  est un ensemble dénombrable. Pour tout  $y \in E$  on note, avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ ,

$$T_y = \inf \{n \geq 1 : X_n = y\} \quad \text{et} \quad N_y = \sum_{m \in \mathbb{N}} 1_{\{X_m = y\}},$$

ce sont respectivement le *premier temps du passage en y* et le *nombre de visites de y*. La matrice  $G$  définie par  $G(x, y) = \mathbb{E}_x[N_y] \leq +\infty$ , nombre moyen de passages en  $y$  par la chaîne partant de  $x$  à l'instant 0, est appelée le *noyau potentiel* de la chaîne. On pose  $F_n(x, y) = P_x\{T_y = n\}$  et  $F(x, y) = P_x\{T_y < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, y)$ .

- (a) Montrer que pour tout  $x, y \in E$ , on a  $G(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m(x, y)$ , où  $P^0 = I$  est la matrice identité, c.à.d.  $I(x, y) = 1$  si  $x = y$ , 0 sinon.  
 (b) Montrer que si  $x \neq y$ , alors  $G(x, y) = F(x, y)G(y, y)$  (avec la convention  $0 \cdot \infty = 0$ ).  
 (c) Montrer que  $F(x, x) = 1$  si et seulement si  $G(x, x) = \infty$ , et que si  $F(x, x) < 1$ , alors

$$G(x, x) = \frac{1}{1 - F(x, x)}.$$

- (d) Un état  $x \in E$  est dit *récurrent* si  $P_x\{T_x < \infty\} = 1$  et *transient* si  $P_x\{T_x < \infty\} < 1$ . Montrer que si  $x$  est transient, alors sous  $P_x$ , la variable  $N_x$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = 1 - P_x\{T_x < \infty\} = P_x\{T_x = \infty\}$ .  
 (e) Soit  $x$  un état récurrent et  $T = \inf \{n \geq 1 : X_n = x\}$ . Montrer que

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x \left( \sum_{n=0}^{T-1} 1_{\{X_n = y\}} \right)$$

définit une mesure invariante, de plus  $\mu_x(x) = 1$  et  $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x[T]$ .

2. (*Théorème ergodique*) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène. Pour  $x, y \in E$  on pose  $M(x, y) = \mathbb{E}_x[T_y]$ . Un état  $x \in E$  est dit *récurrent nul* si  $x$  est récurrent et  $M(x, x) = \infty$ , et *récurrent positif* si  $x$  est récurrent et  $M(x, x) < \infty$ .

- (a) Soit  $R \subset E$  une classe de récurrence de période 1. Montrer que, pour tout  $x, y \in R$ ,

$$P^n(x, y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ est récurrent nul,} \\ 1/M(y, y) & \text{si } y \text{ est récurrent positif.} \end{cases}$$

- (b) Montrer les implications suivantes (avec la convention  $1/\infty = 0$ ):  
 i. Si  $y$  est transient, alors  $P^n(x, y) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in E$ .  
 ii. Si  $y$  est récurrent apériodique, alors  $P^n(x, y) \rightarrow F(x, y)/M(y, y)$  pour tout  $x \in E$ .  
 iii. Si  $y$  est récurrent de période  $d(y) = d > 0$ , alors  $P^n(y, y) \rightarrow d/M(y, y)$ .  
 (c) En déduire que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(x, y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ est transient ou récurrent nul,} \\ \frac{F(x, y)}{M(y, y)} & \text{si } y \text{ est récurrent positif.} \end{cases}$$

3. (*Marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$* ) Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. Bernoulli indépendantes avec  $P\{Z_n = 1\} = p$  et  $P\{Z_n = -1\} = 1-p$ , où  $0 < p < 1$ . On pose  $X_n = Z_1 + \dots + Z_n$ . Alors  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de loi initiale  $\mu = \delta_0$  et de probabilité de transition

$$P(x, x+1) = p, \quad P(x, x-1) = 1-p, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que tous les états sont récurrents si  $p = \frac{1}{2}$  et tous les états sont transients si  $p \neq \frac{1}{2}$ .

4. (*Chaîne à deux états*) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et de probabilité de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

- (a) Calculer  $\mathbb{E}_x[T_x]$  pour  $x \in \{0, 1\}$ .  
 (b) Calculer  $P^n$  et vérifier que, pour toute loi initiale  $\mu_0$ ,

$$P_{\mu_0}\{X_n = 0\} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + (1 - \alpha - \beta)^n \left( \mu_0\{0\} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right).$$

- (c) Montrer que  $X_n$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi  $\mu$ . Que vaut  $\mu$ ?  
 (d) Prouver que  $\mu$  est une mesure invariante :  $P_\mu\{X_n \in A\} = \mu(A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (e) Calculer  $\text{cov}_\mu(X_n, X_{n+1})$ . Les variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  sont-elles indépendantes?  
 (f) On note  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Montrer que

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{n\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \text{var}_\mu(S_n) \leq Cn, \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

- (g) (*Loi faible des grands nombres*) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{en probabilité sous } P_\mu, \text{ sous } P_0 \text{ et sous } P_1.$$

5. (*Chaîne de naissance et de mort*) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov d'espace d'états  $E = \mathbb{N}$  et de matrice de transition

$$P(i, j) = \begin{cases} p_i & \text{si } j = i+1, \\ r_i & \text{si } j = i, \\ q_i & \text{si } j = i-1, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_i + q_i + r_i = 1, & p_i > 0, \\ q_0 = 0 \text{ et } q_i > 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

On note  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_i = \frac{q_1 \cdot \dots \cdot q_i}{p_1 \cdot \dots \cdot p_i}$ , et pour  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $\tau_i = \inf\{n \geq 0 : X_n = i\}$ .

- (a) Étant donné trois états  $a, i$  et  $b$  tels que  $a \leq i \leq b$ , on pose  $u(i) = P_i\{\tau_a < \tau_b\}$ . Exprimer  $u(i)$  en fonction des  $\gamma_j$  pour  $a \leq j < b$ . Traiter le cas particulier où  $p_i = q_i$  pour tout  $i$ .  
 (b) Déterminer  $P_1\{\tau_0 = \infty\}$  et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si  $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = +\infty$ .  
 (c) Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.  
 (d) En déduire que la chaîne est récurrente positive (au sens que tous les états sont récurrents positifs) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_1 \cdot \dots \cdot p_{i-1}}{q_1 \cdot \dots \cdot q_i} < +\infty.$$