Travaux mathématiques
Fascicule XV, 2004
1-17

Cortex des groupes de Lie nilpotents de pas deux

Nizar Ben Fraj et Hatem Megdiche

Résumé

Dans cet article, nous avons caractérisé toutes les représentations irréductibles et unitaires qui ne sont pas séparées de la représentation triviale, dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent de pas deux.

1. Introduction

Soit G un groupe de Lie localement compact. Le cortex de G est le sous-ensemble fermé du dual unitaire $\hat{G}$ de G formé par les représentations unitaires et irréductibles de G, non séparées de la représentation triviale 1_G de G pour la topologie de Jacobson.

La relation qui fait le lien entre le cortex de G et sa structure de groupe a intéressé de nombreux auteurs. Citons entre autres :

-Vershik et Karpushev (1984) [6] qui se sont investis dans les connexions entre la cohomologie de G dans l'espace des représentations unitaires et le cortex de G.

-Boidol, Ludwig et Müller [4] qui ont étudié le cortex du groupe de Lie simplement connexe $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$.

-Bekka et Kanuith [3] qui étudiaient le cortex de plusieurs classes de groupes nilpotents.

-Baklouti qui a décrit explicitement dans [1], le cortex de chaque groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à six. Il s'est intéressé aussi à une généralisation du théorème de Bekka et Kanuith lorsque les orbites génériques sont des variétés linéaires (voir [2, Theorem 1.2]) et à la détermination d'une partie intéressante contenue dans le cortex dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent de pas trois et de centre unidimensionnel (voir [2, Proposition 3.1]).

Dans ce papier, nous décrivons explicitement et d'une manière intrinsèque, le cortex dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent de pas deux. Nous montrons que le cortex est une limite d'une suite croissante finie de sous-ensembles appelés niveaux. Nous déterminons explicitement ces niveaux et nous donnons une méthode de construction des éléments du cortex.

Le résultat fondamental de ce papier est le Théorème 2.3.1.

Dans le cas où G désigne un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie g, Kirillov [5] a montré que l'application :

$$\begin{aligned} g^*_{/Ad^*} &\longrightarrow \hat{G} \\ Ad^*_G(f) &\longmapsto \pi_f \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Ainsi, le cortex de G s'identifie à un sous-ensemble de l'espace dual g^* de g qu'on note $cor(g^*)$, et pour qu'un élément f de g^* soit dans $cor(g^*)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de g^* et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telles que :

$$\lim f_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim Ad^*_{x_n}(f_n) = f. \tag{1.1}$$

On note désormais, pour $X \in G$ et $\ell \in g^*$:

$$X.\ell = ad^*_X(\ell).$$

2. Cortex d'un groupe de Lie nilpotent de pas deux

Dans le cas où g est une algèbre de Lie nilpotente de pas deux (c'est-à-dire $[g,[g,g]] = 0$) de dimension finie, on a le théorème suivant dû à Bekka et Kanuith.

Théorème 2.1 [3].

$$cor(g^*) = \overline{\{X.\ell,\ X \in g \text{ et } \ell \in g^*\}}. \qquad \diamondsuit$$

Nous allons décrire d'une manière explicite les éléments du cortex de g^*. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe une suite croissante finie :

$$N_0 \subset N_1 \subset ..... \subset N_k \subset ..... \subset N_p = cor(g^*)$$

telle que tout élément de N_k est de type :

$$\sum_{\substack{1\le i\le m_k \\ 1\le j\le m'_k}} \alpha_{ijk} Y_i.h_j \quad \text{où } m_k\ ,\ m'_k \in \{1, ..., k+1\},$$

et où les Y_i, les h_j et les α_{ijk} vérifient k contraintes (conditions) que nous allons préciser. Les éléments de N_k sont dits les éléments du cortex de g^* de niveau inférieur ou égal à k.

2.1. Niveaux d'ordre inférieur où égal à 1

Appelons $N_0 = \{X.\ell,\ X \in g \text{ et } \ell \in g^*\}$ l'ensemble des éléments de $cor(g^*)$ de niveau zéro, et soit $N_1 = \{Y_1.h_2 + Y_2.h_1;\ Y_1.h_1 = 0,\ Y_1,\ Y_2 \in g \textit{ et } h_1,\ h_2 \in g^*\}$. Alors

Proposition 2.1.1. *Nous avons :*

$$N_0 \subset N_1 \subset cor(g^*). \qquad \diamondsuit$$

Preuve. Il est évident que $N_0 \subset N_1$. Soient $Y_1,\ Y_2 \in g$ et $h_1,\ h_2 \in g^*$, on considère les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2Y_1 + nY_2)_{n\in\mathbb{N}}$ de g et $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{h_1}{n} + \frac{h_2}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ de g^*, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} X_n.\ell_n &= (n^2Y_1 + nY_2).(\frac{h_1}{n} + \frac{h_2}{n^2}) \\ &= n(Y_1.h_1) + Y_1.h_2 + Y_2.h_1 + \frac{1}{n}Y_2.h_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim\ X_n.\ell_n = Y_1.h_2 + Y_2.h_1 \text{ quand } Y_1.h_1 = 0.$$

C.Q.F.D.

Définition 2.1.1. *Appelons N_1 l'ensemble des éléments du cortex de g^* de niveau inférieur ou égal à 1.* $\diamondsuit$

Remarques 2.1.

1) Si H est un supplémentaire de $Z(g)$ (le centre de g) dans g et si $(Z(g))^*$ est le dual de $Z(g)$ alors

$$\{X.\ell,\ X \in g \text{ et } \ell \in g^*\} = \{X.\ell,\ X \in H \text{ et } \ell \in (Z(g))^*\}.$$

2) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles à termes strictement positifs, alors la suite $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans $[0, +\infty]$.
On supposera par la suite que $\lim(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}} = l$. Ainsi, nous notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} >> (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, resp. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} << (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) si $l \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. $l = +\infty$, resp. $l = 0$). $\diamondsuit$

Dans la suite on désigne par $> Y_1,\ Y_2, \ldots. <^\perp$ (resp. $> \ell_1,\ \ell_2, \ldots. <^\perp$) le sous-espace vectoriel de H orthogonal à $> Y_1,\ Y_2, \ldots <$ (resp. $> \ell_1,\ \ell_2, \ldots <$ de $(Z(g))^*$) pour le produit scalaire canonique de norme associée $\|\cdot\|$.

Par itération, nous introduisons les éléments du cortex de niveaux supérieurs.

2.2. Ramifications d'ordre 1

Soit ℓ un élément non nul de $cor(g^*)$. D'après le théorème 2.1 et les remarques 2.1, il existe deux suites $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(Z(g))^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H telles que la suite $(X_n.\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de g^* converge vers ℓ. Quitte à considérer des suites extraites, on peut supposer que les suites bornées $(\frac{X_n}{\|X_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{\ell_n}{\|\ell_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers Y_1 et h_1. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \|X_n\|\|\ell_n\|$. Alors

$$\ell = \lim\ c_n \tfrac{X_n}{\|X_n\|}\cdot\tfrac{\ell_n}{\|\ell_n\|}\ . \tag{2.1}$$

Si $Y_1.h_1 \neq 0$, alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\ell = (\lim c_n)Y_1.h_1 \in N_0$. Mais si $\ell \notin N_0$, alors en utilisant les deux décompositions suivantes de $\frac{X_n}{\|X_n\|}$ et de $\frac{\ell_n}{\|\ell_n\|}$:

$$\tfrac{X_n}{\|X_n\|} = x_n^1 Y_1 + X_n^1, \quad \text{avec } X_n^1 \in > Y_1 <^{\perp} \quad \text{et } \lim x_n^1 = 1$$

et

$$\tfrac{\ell_n}{\|\ell_n\|} = y_n^1 h_1 + \ell_n^1, \quad \text{avec } \ell_n^1 \in > h_1 <^{\perp} \quad \text{et } \lim y_n^1 = 1,$$

puis en remplaçant pour $n\in\mathbb{N}$, $c_n x_n^1 y_n^1$ (resp. $\frac{1}{x_n^1}X_n^1$, resp. $\frac{1}{y_n^1}\ell_n^1$) par c_n (resp. X_n^1, resp. ℓ_n^1), l'équation (2.1) devient

$$\ell = \lim\ c_n(Y_1 + X_n^1).(h_1 + \ell_n^1). \tag{2.2}$$

Ce qui montre que ℓ est issu de l'un des trois cas suivants que nous appelons ramifications d'ordre 1 et que nous notons par R_1, R_2 et R_3.

2.2.1. Ramification R_1. La ramification R_1 est définie par $Y_1.h_1 = 0$ et $(\|X_n^1\|)_{n\in\mathbb{N}} >> (\|\ell_n^1\|)_{n\in\mathbb{N}}$. En utilisant la décomposition

$$\tfrac{X_n^1}{\|X_n^1\|} = x_n^2 Y_2 + X_n^2, \quad \text{avec } X_n^2 \in > Y_1,\ Y_2 <^{\perp} \quad \text{et } \lim x_n^2 = 1 \tag{2.3}$$

et en remplaçant pour $n\in\mathbb{N}$, $x_n^2\|X_n^1\|$ (resp. $\|X_n^1\|X_n^2$) par x_n^2 (resp. X_n^2), nous déduisons de (2.2) que

$$\ell = \lim\ c_n(Y_1 + x_n^2 Y_2 + X_n^2).(h_1 + \ell_n^1) \tag{2.4}$$

avec $(1)_{n\in\mathbb{N}} >> (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} >> (\|X_n^2\|)_{n\in\mathbb{N}}$. D'où

$$\ell = \lim\Big(c_n x_n^2 Y_2.h_1 + o(c_n x_n^2)\Big).$$

Ce qui montre que $Y_2.h_1 = 0$ car $\ell \notin N_0$.

2.2.2. Ramification R_2. La ramification R_2 est définie par $Y_1.h_1 = 0$ et $(\|X_n^1\|)_{n\in\mathbb{N}} << (\|\ell_n^1\|)_{n\in\mathbb{N}}$. En écrivant

$$\tfrac{\ell_n^1}{\|\ell_n^1\|} = y_n^2 h_2 + \ell_n^2 \text{ avec } \ell_n^2 \in > h_1,\ h_2 <^{\perp} \quad \text{et } \lim y_n^2 = 1, \tag{2.4}$$

et en suivant un raisonnement analogue à celui de la ramification R_1, nous déduisons que $Y_1.h_2 = 0$.

2.2.3. Ramification R_3. La ramification R_3 est définie par $Y_1.h_1 = 0$ et $(\|X_n^1\|)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (\|\ell_n^1\|)_{n\in\mathbb{N}}$. En utilisant les formules (2.3) et (2.4) et en substituant x_n^2 (resp. X_n^2, resp y_n^2, resp. ℓ_n^2), à $x_n^2\|X_n^1\|$ (resp. $\|X_n^1\|X_n^2$, resp. $y_n^2\|\ell_n^1\|$, resp. $\|\ell_n^1\|\ell_n^2$), alors l'équation (2.2) devient

$$\ell = \lim\ c_n(Y_1 + x_n^2 Y_2 + X_n^2).(h_1 + y_n^2 h_2 + \ell_n^2) \tag{2.5}$$

avec $(1)_{n\in\mathbb{N}} >> (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} >> (\|X_n^2\|)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1)_{n\in\mathbb{N}} >> (y_n^2)_{n\in\mathbb{N}} >> (\|\ell_n^2\|)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (y_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe une suite $(f_n^{2,1})_{n\in\mathbb{N}} = o\Big((x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ telle que $(y_n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} + (f_n^{2,1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Ce qui permet de déduire d'après (2.5) que

$$\ell = \lim \Big(c_n x_n^2(Y_1.h_2 + Y_2.h_1) + o(c_n x_n^2)\Big).$$

Par conséquent, si $Y_1.h_2 + Y_2.h_1 \neq 0$ alors $\lim(c_n x_n^2)$ existe et

$$\ell = (\lim\ c_n x_n^2)(Y_1.h_2 + Y_2.h_1)$$

ce qui montre que $\ell \in N_1$.

2.3. Niveaux d'ordre supérieur

Pour $p \geq 2$, supposons que pour tout $1 \leq k < p$, nous avons défini toutes les ramifications $R_{i_1,\ldots,i_k}$ d'ordre k et nous avons obtenu tous les éléments du cortex de g^* de niveau inférieur ou égal à k . Nous introduisons ainsi les définitions et les notations suivantes :

Définition 2.3.1. *Appelons ramification d'ordre p, notée $R_{i_1,\ldots,i_p}$, un cas issu de la ramification $R_{i_1,\ldots,i_{p-1}}$ (permettant éventuellement de fournir de nouveaux éléments du cortex de g^*).* $\diamondsuit$

Notation 2.3.1. Pour tout $p \geq 2$, nous notons :
1) n_p le nombre de ramifications d'ordre p,
2) $E_{p,s}$, $1 \leq s \leq n_p$, l'ensemble des éléments du cortex de g^* obtenus à partir de la $s^{\text{ième}}$ ramification d'ordre p,
3) $\mathcal{N}_p = \cup_{1\leq s\leq n_p} E_{p,s}$,
4) $N_p = N_{p-1} \cup \mathcal{N}_p$
5) $p_0 = \inf\{p' \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}/\ N_{p'} = \cup_{p\in\mathbb{N}} N_p\}$. $\diamondsuit$

Définition 2.3.2. *Pour tout $p \geq 2$, nous appelons N_p l'ensemble des éléments du cortex de g^* de niveau $\leq p$.* $\diamondsuit$

Nous nous proposons de déterminer N_2.

Proposition 2.3.1.

$$N_2 \subset N_2' = \left\{ \begin{array}{c} Y_1.h_3 + Y_2.h_2 + Y_3.h_1; \\ Y_1.h_1 = 0,\ Y_1.h_2 + Y_2.h_1 = 0, \\ \textit{les } Y_i \in H \textit{ et les } h_i \in (Z(g))^* \end{array} \right\}.$$

$\diamondsuit$

Preuve. Soit $\ell \in N_2 \setminus N_1$; en poursuivant l'étude des ramifications $R_i,\ 1 \leq i \leq 3$, nous obtenons $Y_2.h_1 = 0$ (resp. $Y_1.h_2 = 0$, resp. $Y_1.h_2 + Y_2.h_1 = 0$) quand ℓ est issu de R_1 (rep. R_2, resp. R_3). Après étude, seules trois ramifications d'ordre deux donnent naissance à de nouvelles formes d'éléments du cortex de g^*. Notons ces trois ramifications $R_{3,1}$, $R_{3,2}$ et $R_{3,3}$, déterminons ainsi $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,3}$ (notation 2.3.1).

$R_{3,1}$ est définie par

$$Y_1.h_1 = 0,\ Y_1.h_2 + Y_2.h_1 = 0,\ ((x_n^2)^2)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (\|X_n^2\|)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (\|\ell_n^2\|)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\text{et } (f_n^{2,1})_{n\in\mathbb{N}} \simeq \Big((x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\Big),\ \text{ ou } (f_n^{2,1})_{n\in\mathbb{N}} << \Big((x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\Big).$$

Par les décompositions

$$\frac{X_n^2}{\|X_n^2\|} = x_n^3 Y_3 + X_n^3,\ \text{ avec } X_n^3 \in> Y_1,\ Y_2,\ Y_3 <^{\perp} \text{ et } \lim x_n^3 = 1$$

$$\frac{\ell_n^2}{\|\ell_n^2\|} = y_n^3 h_3 + \ell_n^3,\ \text{ avec } \ell_n^3 \in> h_1,\ h_2,\ h_3 <^{\perp} \text{ et } \lim y_n^3 = 1$$

$$f_n^{2,1} = \alpha_1 (x_n^2)^2 + f_n^{2,2},\ \text{ où } (|f_n^{2,2}|)_{n\in\mathbb{N}} << ((x_n^2)^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

et par les remplacements de $x_n^3\|X_n^2\|$ (resp. $\|X_n^2\|X_n^3$, resp. $y_n^3\|\ell_n^2\|$, resp. $\|\ell_n^2\|\ell_n^3$) par x_n^3 (resp. X_n^3, resp. y_n^3, resp. ℓ_n^3), l'équation (2.5) s'écrit

$$\ell = \lim\ c_n(Y_1 + x_n^2 Y_2 + x_n^3 Y_3 + X_n^3).(h_1 + [x_n^2 + \alpha_1(x_n^2)^2 + f_n^{2,2}]h_2 + y_n^3 h_3 + \ell_n^3), \quad (2.6)$$

avec $(1)_{n\in\mathbb{N}} >> (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} >> (x_n^3)_{n\in\mathbb{N}} >> (\|X_n^3\|)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n^3)_{n\in\mathbb{N}} >> (\|\ell_n^3\|)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $(x_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \simeq ((x_n^2)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(y_n^3)_{n\in\mathbb{N}} \simeq ((x_n^2)^2)_{n\in\mathbb{N}}$), il existe une suite $(e_n^{3,1})_{n\in\mathbb{N}} = o((x_n^2)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(f_n^{3,1})_{n\in\mathbb{N}} = o((x_n^2)^2)_{n\in\mathbb{N}}$) telle que

$$(x_n^3)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n^2)^2 + e_n^{2,1})_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ (resp. } (y_n^3)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n^2)^2 + f_n^{3,1})_{n\in\mathbb{N}}\ ).$$

On en déduit d'après (2.6) que

$$\ell = \lim \Big(c_n(x_n^2)^2[Y_1.(\alpha_1 h_2 + h_3) + Y_2.h_2 + Y_3.h_1] + o(c_n(x_n^2)^2\Big).$$

Par conséquent, si $Y_1.(\alpha_1 h_2 + h_3) + Y_2.h_2 + Y_3.h_1 \neq 0$ alors $\lim(c_n(x_n^2)^2)$ existe et

$$\ell = (\lim \ c_n(x_n^2)^2)(Y_1.(\alpha_1 h_2 + h_3) + Y_2.h_2 + Y_3.h_1) \ .$$

D'où

$$E_{2,1} \subset N_2'.$$

Une étude de $R_{3,2}$ et de $R_{3,3}$, analogue à celle de $R_{3,1}$, montre que $E_{2,2} \subset N_2'$ et $E_{2,3} \subset N_2'$.

C.Q.F.D.

Proposition 2.3.2. *Nous avons*

$$N_2 = N_2'. \qquad \diamondsuit$$

Preuve : Nous avons $N_2' \subset N_2$. En effet,

$$\lim \ (n^3 Y_1 + n^2 Y_2 + n Y_3).(\tfrac{1}{n} h_1 + \tfrac{1}{n^2} h_2 + \tfrac{1}{n^3} h_3) = Y_1.h_3 + Y_2.h_2 + Y_3.h_1 \ ,$$

quand $Y_1.h_1 = 0, \ Y_1.h_2 + Y_2.h_1 = 0,$ les $Y_i \in H$ et les $h_i \in (Z(g))^*$. Ce qui achève la preuve d'après la proposition 2.3.1.

C.Q.F.D.

Proposition 2.3.3. *Pour tout* $p \in \{1, ..., p_0\}$ *et* $s \in \{1, ..., n_p\}$*, il existe deux suites* $(m_k = m_k(p,s))_{0\leq k\leq p} \subset \{1, ..., \dim(H)\}$, $(m_k' = m_k'(p,s))_{0\leq k\leq p} \subset \{1, ..., \dim(Z(g))\}$ *et* $(p+1)$ *familles finies de polynômes constructibles réels :*

$$(F_{psq})_{0\leq q\leq p} = \Big\{ Q_{(p,s,q,r)}((X_{ijk})_{1\leq i\leq m_q, \ 1\leq j\leq m_q' \ \ et \ \ 0\leq k\leq q}), \ 1 \leq r \leq card(F_{psq}) \Big\}_{0\leq q\leq p}$$

telles que :

a)

$$E_{p,s} \subset E_{p,s}' = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{1\leq i\leq m_p, \ 1\leq j\leq m_p'} \alpha_{ijp} Y_i.h_j; \\ \displaystyle\sum_{1\leq i\leq m_k, \ 1\leq j\leq m_k'} \alpha_{ijp} Y_i.h_j = 0 \ pour \ tout \ 0 \leq k \leq p-1, \\ Q(\alpha_{i,j,k}) = 0 \ pour \ tout \ Q \in (F_{psq})_{0\leq q\leq p}, \\ les \ Y_i \in H, \ les \ h_i \in (Z(g))^* \ et \ les \ \alpha_{i,j,k} \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

b) Pour tout $0 \leq q \leq p$*, il existe* $1 \leq i_q^0 \leq m_p$, $1 \leq j_q^0 \leq m_p'$ *et* $1 \leq r \leq card(F_{psq})$ *vérifiant :*

$$Q_{(p,s,q,r)} = \alpha_{i_q^0 j_q^0 q} - 1 = 0$$

et pour tout $q' \in \{q+1,...,p\}$, *il existe* $1 \leq r \leq card(F_{psq})$ *vérifiant*

$$Q_{(p,s,q,r)} = \alpha_{i_q^0 j_q^0 q'} = 0.$$

c) Si $\ell \in E_{p,s}$ *alors*

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim c_n\Big(Y_1 + \sum_{2\leq i\leq m_p}[x_n^i + (\sum_{1\leq i'\leq \varphi_p(i)} x_n^{i,i'}) + e_n^{i,\varphi_p(i)}]Y_i + X_n^{m_p}\Big).\\
&\qquad\qquad \Big(h_1 + \sum_{2\leq j\leq m'_p}[y_n^j + (\sum_{1\leq j'\leq \psi_p(j)} y_n^{j,j'}) + f_n^{j,\psi_p(j)}]h_j + \ell_n^{m'_p}\Big)\\
&= \lim\Big(\sum_{0\leq k\leq p-1} c_n S_n^k\Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k} \alpha_{ijk} Y_i.h_j = 0\Big]_{(k)}\\
&\qquad\qquad + c_n S_n^p \sum_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p} \alpha_{ijk} Y_i.h_j + o(c_n S_n^p)\Big).
\end{aligned}$$

Avec :

1) *les* Y_k, $1 \leq k \leq m_p$ *(resp.* h_k, $1 \leq k \leq m'_p$*) forment une base orthogonale d'un sous-espace vectoriel de* H *(resp.* $(Z(g))^*$*),*

2) $\Big\{(x_n^{m_p})_{n\in\mathbb{N}} << \cdots << (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\Big\} \subset \mathbb{R}_+^*$ *et* $\Big\{(y_n^{m'_p})_{n\in\mathbb{N}} << \cdots << (y_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\Big\} \subset \mathbb{R}_+^*$,

3) φ_p *et* ψ_p *sont deux applications respectivement de* $\{2,...,m_p\}$ *et* $\{2,...,m'_p\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$,

4) *pour tout* $2 \leq i \leq m_p$ *(resp.* $2 \leq j \leq m'_p$*),*

$$(|e_n^{i\varphi_p(i)}|)_{n\in\mathbb{N}} << (x_n^{i,\varphi_p(i)})_{n\in\mathbb{N}} << \cdots << (x_n^{i,1})_{n\in\mathbb{N}} << (x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

$$\Big(resp.\ (|f_n^{j\psi_p(j)}|)_{n\in\mathbb{N}} << (y_n^{j,\psi_p(j)})_{n\in\mathbb{N}} << \cdots << (y_n^{j,1})_{n\in\mathbb{N}} << (y_n^j)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0\Big)$$

5) *les suites* $(X_n^{m_p})_{n\in\mathbb{N}} \subset> Y_1,...,Y_{m_p} <^\perp$ *et* $(\ell_n^{m'_p})_{n\in\mathbb{N}} \subset> h_1,...,h_{m'_p} <^\perp$ *vérifient*

$$(\|X_n^{m_p}\|)_{n\in\mathbb{N}} << (x_n^{m_p})_{n\in\mathbb{N}} \ et\ (\|\ell_n^{m'_p}\|)_{n\in\mathbb{N}} << (y_n^{m'_p})_{n\in\mathbb{N}}$$

6) $$\Big\{(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}) << \cdots << (S_n^0)_{n\in\mathbb{N}} = 1\Big\} \subset \mathbb{R}_+^*. \qquad \diamondsuit$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence. La proposition est vraie pour les ordres $p = 1$ et $p = 2$. Soit $p \in \{3, \cdots, p_0\}$ (voir notation 2.3.1). On suppose que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $(p-1)$. Considérons un élément ℓ de $cor(g^*)$ de niveau p qui n'appartient pas à N_{p-1}, alors d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\ell = \lim\ c_n\Big(Y_1 + \sum_{2\leq i\leq m_{p-1}} [x_n^i + (\sum_{1\leq i'\leq \varphi_{p-1}(i)} x_n^{i,i'}) + e_n^{i,\varphi_{p-1}(i)}]Y_i + X_n^{m_{p-1}}\Big)\cdot \\ \Big(h_1 + \sum_{2\leq j\leq m'_{p-1}} [y_n^j + (\sum_{1\leq j'\leq \psi_{p-1}(j)} y_n^{j,j'}) + f_n^{j,\psi_{p-1}(j)}]h_j + \ell_n^{m'_{p-1}}\Big) \\ = \lim\Big(\sum_{0\leq k\leq p-1} c_n S_n^k\Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k} \alpha_{ijk} Y_i.h_j = 0\Big]_{(k)} + o(c_n S_n^{p-1})\Big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

L'écriture ci-dessus de ℓ prouve que $o((c_n S_n^{p-1})_{n\in\mathbb{N}})$ s'écrit sous la forme d'une somme finie de produits de suites d'éléments de H par des suites d'éléments de $(Z(g))^*$. Chacun de ces produits est très faible en norme par rapport à $(c_n S_n^{p-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Partageons l'ensemble $\mathcal{L}$ de ces produits en deux sous-ensembles $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ dont $\mathcal{L}_1$ contient chaque élément de $\mathcal{L}$ qui est très faible en norme par rapport à celle d'un autre élément de $\mathcal{L}$ et dont $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1$; et alors on a les cinq cas suivants :

Cas 1 : Ce cas est défini par :

$$\mathcal{L}_2 = \Big\{e_n^{i_a,\varphi_{p-1}(i_a)} Y_{i_a}.h_1,\ f_n^{j_b,\psi_{p-1}(j_b)} Y_1.h_{j_b} \text{ avec } {\scriptstyle 1\leq a\leq\lambda} \text{ et } {\scriptstyle 1\leq b\leq\lambda'}\Big\}$$

où $(\lambda, \lambda')\in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}} = (e_n^{i_1,\varphi_{p-1}(i_1)})_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lambda > 0$; et $(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n^{j_1,\psi_{p-1}(j_1)})_{n\in\mathbb{N}}$ quand $\lambda = 0$. Soient $\alpha_{i_a 1p} = \lim(\frac{e_n^{i_a,\varphi_{p-1}(i_a)}}{S_n^p}),\ 0 \leq a \leq \lambda$ et $\alpha_{1 j_b p} = \lim(\frac{f_n^{j_b,\psi_{p-1}(j_b)}}{S_n^p}),\ 0 \leq b \leq \lambda'$, alors l'équation (2.7) devient

$$\begin{aligned}\ell = \lim\Big(\sum_{0\leq k\leq p-1} c_n S_n^k\Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k} \alpha_{ijk} Y_i.h_j = 0\Big]_{(k)} \\ + c_n S_n^p\Big[\sum_{1\leq a\leq\lambda} \alpha_{i_a jp} Y_{j_a}.h_1 + \sum_{1\leq a\leq\lambda'} \alpha_{1 j_a p} Y_1.h_{j_a}\Big] + o(c_n S_n^p)\Big)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Posons

1) $m_p = m_{p-1}$ et $m'_p = m'_{p-1}$,

2) $\varphi_p(i_a) = \varphi_{p-1}(i_a) + 1$, $(e_n^{i_a,\varphi_{p-1}(i_a)})_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_{i_a 1p} S_n^p + e_n^{i_a,\varphi_p(i_a)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n^{i_a,i'_a})_{n\in\mathbb{N}} = \alpha_{i_a 1p}(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq a \leq \lambda$

3) $\psi_p(j_a) = \psi_{p-1}(j_a) + 1$, $(f_n^{j_a,\psi_{p-1}(j_a)})_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_{1 j_a p} S_n^p + f_n^{j_a,\varphi_p(j_a)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n^{j_a,j'_a})_{n\in\mathbb{N}} = \alpha_{1 j_a p}(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq a \leq \lambda'$

4) $\varphi_p(i)=\varphi_{p-1}(i)$ (resp. $\psi_p(j)=\psi_{p-1}(j)$) $, i\in\{2,...,m_{p-1}\}\setminus\{i_1,...,i_\lambda\}$ (resp. $j\in\{2,...,m'_{p-1}\}\setminus\{j_1,...,j'_\lambda\}$).

Ainsi l'équation (2.8) s'écrit

$$\ell=\lim\ c_n\Big(Y_1+\sum_{2\leq i\leq m_p}[x_n^i+(\sum_{1\leq i'\leq\varphi_p(i)}x_n^{i,i'})+e_n^{i,\varphi_p(i)}]Y_i+X_n^{m_p}\Big).$$

$$\Big(h_1+\sum_{2\leq j\leq m'_p}[y_n^j+(\sum_{1\leq j'\leq\psi_p(j)}y_n^{j,j'})+f_n^{j,\psi_p(j)}]h_j+\ell_n^{m'_p}\Big).$$

Pour achever l'étude du cas 1, il suffit de prendre

1) $F_{psq}=F_{(p-1)sq}$, $0\leq q\leq p-1$,
2) $Q_{(p,s,p,1)}=\alpha_{i_11p}-1=0$ si $\lambda\neq0$ ou $Q_{(p,s,p,1)}=\alpha_{1j_1p}-1=0$ si $\lambda=0$,
3) $Q_{(p,s,p,r)}=\alpha_{ijp}=0$ si $(i,j)\notin\{(i_a,1),(1,j_b);\ 1\leq a\leq\lambda$ et $1\leq b\leq\lambda'\}$.

Cas 2 : Ce cas est défini par :

$$\mathcal{L}_2=\Big\{X_n^{m_{p-1}}.h_1,\ Y_1.\ell_n^{m'_{p-1}},e_n^{i_a,\varphi_{p-1}(i_a)}Y_{i_a}.h_1,\ f_n^{j_b,\psi_{p-1}(j_b)}Y_1.h_{j_b},$$
$$x_n^{i_c^1}y_n^{j_c^1}Y_{i_c^1}.h_{j_c^1},\ x_n^{i_d^2}y_n^{j_d^2,{j'}_d^2}Y_{i_d^2}.h_{j_d^2},\ x_n^{i_e^4,{i'}_e^4}y_n^{j_e^4,{j'}_e^4}Y_{i_e^4}.h_{j_e^4},\ x_n^{i_f^4,{i'}_f^4}y_n^{j_f^4,{j'}_f^4}Y_{i_f^4}.h_{j_f^4};$$
$$_{1\leq a\leq\lambda,\ 1\leq b\leq\lambda',\ 1\leq c\leq\lambda_1,\ 1\leq d\leq\lambda_2,\ 1\leq e\leq\lambda_3\text{ et }1\leq f\leq\lambda_4}\Big\},$$

Si $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=0_{\mathbb{R}^4}$, on pose $(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}=(<X_n^{m_p-1},\lim(\frac{X_n^{m_p-1}}{\|X_n^{m_p-1}\|})>)_{n\in\mathbb{N}}$. Sinon, il existe (par récurrence) une suite $(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ et des fonctions polynomiales

$$P_{bi_a^bj_a^b},\ _{1\leq a\leq\lambda_b\ et\ 1\leq b\leq4}$$

vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$x_n^{i_a^1}y_n^{j_a^1}=P_{1i_a^1j_a^1}\Big((\alpha_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p,\ 0\leq k\leq p-1}\Big)S_n^p\ \ pour\ tout\ _{1\leq a\leq\lambda_1},$$

$$x_n^{i_a^2}y_n^{j_a^2,{j'}_a^2}=P_{2i_a^2j_a^2}\Big((\alpha_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p,\ 0\leq k\leq p-1}\Big)S_n^p\ \ pour\ tout\ _{1\leq a\leq\lambda_2},$$

$$x_n^{i_a^3,{i'}_a^3}y_n^{j_a^3}=P_{3i_a^3j_a^3}\Big((\alpha_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p,\ 0\leq k\leq p-1}\Big)S_n^p\ \ pour\ tout\ _{1\leq a\leq\lambda_3}$$

et

$$x_n^{i_a^4,{i'}_a^4}y_n^{j_a^4,{j'}_a^4}=P_{4i_a^4j_a^4}\Big((\alpha_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p,\ 0\leq k\leq p-1}\Big)S_n^p\ \ pour\ tout\ _{1\leq a\leq\lambda_4}.$$

Posons :

1) pour tout $1 \leq a \leq \lambda$, $\varphi_p(i_a) = \varphi_{p-1}(i_a) + 1$,
$(e_n^{i_a,\varphi_{p-1}(i_a)})_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_{i_a 1p} S_n^p + e_n^{i_a,\varphi_p(i_a)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n^{i_a,i'_a})_{n\in\mathbb{N}} = \alpha_{i_a 1p}(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$,
où $(|e_n^{i_a,\varphi_p(i_a)}|)_{n\in\mathbb{N}} << (|x_n^{i_a,i'_a}|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\alpha_{i_a 1p} \in \mathbb{R}$,
2) pour tout $1 \leq a \leq \lambda'$, $\psi_p(j_a) = \psi_{p-1}(j_a) + 1$,
$(f_n^{j_a,\psi_{p-1}(j_a)})_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_{1 j_a p} S_n^p + f_n^{j_a,\psi_p(j_a)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n^{j_a,j'_a})_{n\in\mathbb{N}} = \alpha_{1 j_a p}(S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$,
où $(|f_n^{j_a,\psi_p(j_a)}|)_{n\in\mathbb{N}} << (|y_n^{j_a,j'_a}|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\alpha_{1 j_a p} \in \mathbb{R}$,
3) $m_p = m_{p-1} + 1$ et $m'_p = m'_{p-1} + 1$,
4) $Y_{m_p} = \lim\ (\frac{X_n^{m_p - 1}}{S_n^p})$ et $h_{m'_p} = \lim\ (\frac{\ell_n^{m'_p - 1}}{S_n^p})$,
5) $(X_n^{m_{p-1}})_{n\in\mathbb{N}} = \Big((x_n^{m_p} + e_n^{m_p,\varphi_p(m_p)})Y_{m_p} + X_n^{m_p}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi_p(m_p) = 1$,
$(x_n^{m_p})_{n\in\mathbb{N}} = (S_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n^{m_p})_{n\in\mathbb{N}} \subset> Y_1, ..., \ Y_{m_p} <^{\perp}$,
6) $(\ell_n^{m'_{p-1}})_{n\in\mathbb{N}} = \Big((y_n^{m'_p} + f_n^{m'_p,\psi_p(m'_p)})h_{m'_p} + \ell_n^{m'_p}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\psi_p(m'_p) = 1$,
$(y_n^{m'_p})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n^{m_p})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ell_n^{m'_p})_{n\in\mathbb{N}} \subset> h_1, ..., \ h_{m'_p} <^{\perp}$.

Ainsi, en écrivant

$$\begin{aligned} L_p = & \sum_{1\leq a\leq\lambda_1} P_{1 i_a^1 j_a^1}(\alpha_{ijk}) Y_{i_a^1}.hj_a^1 + \sum_{1\leq a\leq\lambda_2} P_{2 i_a^2 j_a^2}(\alpha_{ijk}) Y_{i_a^2}.hj_a^2 \\ & + \sum_{1\leq a\leq\lambda_3} P_{3 i_a^3 j_a^3}(\alpha_{ijk}) Y_{i_a^3}.hj_a^3 + \sum_{1\leq a\leq\lambda_4} P_{4 i_a^4 j_a^4}(\alpha_{ijk}) Y_{i_a^4}.hj_a^4 \\ & + \sum_{1\leq a\leq\lambda} \alpha_{i_a 1p} Y_{i_a}.h_1 + \sum_{1\leq a\leq\lambda'} \alpha_{1 j_a p} Y_1.h_{j_a} \\ & + Y_{m_p}.h_1 + Y_1.h_{m'_p}, \end{aligned}$$

l'équation (2.8) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \ell = \lim\ c_n & \Big(Y_1 + \sum_{2\leq i\leq m_p} [x_n^i + (\sum_{1\leq i'\leq\varphi_p(i)} x_n^{i,i'}) + e_n^{i,\varphi_p(i)}]Y_i + X_n^{m_p}\Big). \\ & \Big(h_1 + \sum_{2\leq j\leq m'_p} [y_n^j + (\sum_{1\leq j'\leq\psi_p(j)} y_n^{j,j'}) + f_n^{j,\psi_p(j)}]h_j + \ell_n^{m'_p}\Big) \\ = \lim & \Big(\sum_{0\leq k\leq p-1} c_n S_n^k \Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k} \alpha_{ijk} Y_i.h_j = 0\Big]_{(k)} + c_n S_n^p L_p + o(c_n S_n^p)\Big) \end{aligned}$$

Par itération dans l'ordre croissant, en remplaçant dans L_p, $Y_{i_q^0 j_q^0}$ par $-C_q + Y_{i_q^0 j_q^0}$, $0 \leq q \leq p-1$ (C_q est la q^{ième} contrainte), on obtient

$$\ell = (\lim\ c_n S_n^p) L_p = \sum_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p} \alpha_{ijp} Y_i.h_j$$

avec $\alpha_{i_q^0 j_q^0 p} = 0$ pour tout $0 \leq q \leq p-1$.

Ce qui permet de déduire qu'il existe un coefficient $\alpha_{i_p^0 j_p^0 p} = 1$ (quitte à remplacer S_n^p par $S_n^p \alpha_{i_p^0 j_p^0 p}$) et que les coefficients α_{ijp}, $1 \leq i \leq m_p$, $1 \leq j \leq m'_p$, sont des fonctions polynomiales de variables α_{ijk}, $1 \leq i \leq m_{p-1}$, $1 \leq j \leq m'_{p-1}$ et $0 \leq k \leq p-1$. D'où la construction de la famille F_{psp}. Enfin pour tous les $0 \leq q \leq p-1$ et $1 \leq r \leq card(F_{(p-1)sq})$, on pose $Q_{(p,s,q,r)} = Q_{(p-1,s,q,r)}$ et $F_{psq} = F_{(p-1)sq}$. Ce qui achève l'étude du cas 2.

Un raisonnement analogue à celui du cas 2 prouve la proposition à l'ordre p pour le cas 3 (resp. cas 4, resp. cas 5) où l'ensemble $\mathcal{L}_2$ est celui du cas 2 privé de $\left\{Y_1.\ell_n^{m'_{p-1}}\right\}$ $\left(\text{resp. } \left\{X_n^{m_{p-1}}.h_1\right\}, \text{resp. } \left\{Y_1.\ell_n^{m'_{p-1}},\ X_n^{m_{p-1}}.h_1\right\}\right)$ dont $m_p = m_{p-1}+1$ et $m'_p = m'_{p-1}$ (resp. $m_p = m_{p-1}$ et $m'_p = m'_{p-1}+1$, resp. $m_p = m_{p-1}+1$ et $m'_p = m'_{p-1}+1$).

C.Q.F.D.

Notons $N'_p = \left(\underset{1 \leq s \leq n_p}{\cup} E'_{p,s}\right) \cup N'_{p-1}, \quad 2 < p \leq p_0$.

Corollaire 2.3.1. *Nous avons*

> $\imath$) $p_0 \leq \dim(H)\dim(Z(g))$.
>
> $\imath\imath$) $cor(g^*) \subset N'_{p_0}$. ♢

Preuve. $\imath$) et $\imath\imath$) découlent respectivement des assertions b) et a) de la proposition 2.3.2.

Proposition 2.3.3. *Pour tous les $1 \leq p \leq p_0$ et $1 \leq s \leq n_p$, il existe deux suites de fonctions constructibles $X_n : E'_{p,s} \longrightarrow H$ et $L_n : E'_{p,s} \longrightarrow (Z(g))^*$ définies en tout $\ell \in E_{p,s}$ par :*

$$(X_n(\ell))_{n\in\mathbb{N}^*} = \Big(\sum_{1\leq i\leq m_p} [\sum_{1\leq i'\leq\omega(i)} P_{i,i'}((\alpha_{i,j,k})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p,\ 0\leq k\leq p}) n^{i'}]Y_i\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

et

$$(L_n(\ell))_{n\in\mathbb{N}^*} = \Big(\sum_{1\leq j\leq m'_p} [\sum_{1\leq j'\leq\sigma(j)} Q_{j,j'}((\alpha_{i,j,k})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p,\ 0\leq k\leq p}) n^{j'}]h_j\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

telles que

$$\lim\ n^t X_n(\ell).L_n(\ell) = \ell, \ \textit{pour tout}\ \ell \in E'_{p,s} \tag{2.9}$$

avec : $(P_{i,i'})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq i'\leq\omega(i)\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_{j,j'})_{1\leq j\leq m'_p,\ 1\leq j'\leq\sigma(j)\in\mathbb{N}^*}$ sont deux familles finies de polynômes à plusieurs indéterminées et à coefficients réels et $t \in \mathbb{Z}^*_-$. ♢

Preuve. La construction des suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se fait par récurrence à travers l'étude des cinq cas de la preuve de la proposition 2.3.3. Avec les mêmes notations que celles de la proposition précédente on suppose que pour tous les $1 \leq i \leq m_p$ et $2 \leq i' \leq \varphi_p(i)$ il existe deux éléments n_i et $n_{i,i'}$ de $\mathbb{Z}^*_-$ et des fonctions polynômes $P_{i,i'}((X_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'p\ et\ 0\leq k\leq p})$, et, pour tous les $1 \leq j \leq m'_p$ et $2 \leq j' \leq \psi_p(j)$ il existe deux éléments n'_j et $n'_{j,j'}$ de $\mathbb{Z}^*_-$ et des fonctions polynômes $Q_{j,j'}((X_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'p\ et\ 0\leq k\leq p})$ telles que :

$$\begin{aligned}
\lim\ c_n\Big(Y_1+\sum_{2\leq i\leq m_p}[\ n^{n_i}+\sum_{1\leq i'\leq\varphi_p(i)} P_{i,i'}((\alpha_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'p\ et\ 0\leq k\leq p})\ n^{n_{i,i'}}]Y_i\Big).\\
\Big(h_1+\sum_{2\leq j\leq m'_p}[\ n^{n'_j}+\sum_{1\leq j'\leq\psi_p(j)} Q_{j,j'}((\alpha_{ijk})_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'p\ et\ 0\leq k\leq p})\ n^{n'_{j,j'}}]h_j\Big)\\
=\lim\Big(\sum_{0\leq k\leq p-1} c_n\ n^{n^0_q}\Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k}\alpha_{ijk}Y_i.h_j=0\Big]_{(k)}\\
+c_n\ n^{n^0_p}\Big[\sum_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p}\alpha_{ijp}Y_i.h_j\Big]_{(p)}+O(c_n\ n^{n'})\Big)\\
=\sum_{1\leq i\leq m_p,\ 1\leq j\leq m'_p}\alpha_{ijp}Y_i.h_j \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

où $(n^0_q)_{0\leq q\leq p}$ est une suite strictement décroissante à valeurs dans $\mathbb{Z}^*_-$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^{-n^0_p})_{n\in\mathbb{N}}$ et $n' < n^0_p$.

Reprenons l'étude des cinq cas de la proposition 2.3.3 tout en remplaçant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(n^{-n^0_{p+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ où n^0_{p+1} est un entier relatif strictement inférieur à n^0_p.

Dans le cas 1.

1) si $n^0_p - n' > 1$, on prend n^0_{p+1} compris strictement entre n' et n^0_p, et on pose

a) pour tout $1 \leq a \leq \lambda$ (resp. $1 \leq b \leq \lambda'$), $\varphi_{p+1}(i_a) = \varphi_p(i_a)+1$, $n_{i_a,i'_a} = n^0_{p+1}$ et $P_{i_a,i'_a} = \alpha_{i_a1(p+1)} \in \mathbb{R}$ (resp. $\psi_{p+1}(j_b) = \psi_p(j_b) + 1$, $n'_{j_b,j'_b} = n^0_{p+1}$ et $Q_{j_b,j'_b} = \alpha_{1j_b(p+1)} \in \mathbb{R}$)

b) $m_{p+1} = m_p$ et $m'_{p+1} = m'_p$

c) pour tout $i \in \{2, ..., m_{p+1}\} \setminus \{i_1, ..., i_\lambda\}$ (resp. $j \in \{2, ..., m'_{p+1}\} \setminus \{j_1, ..., j'_\lambda\}$), $\varphi_{p+1}(i) = \varphi_p(i)$ (resp. $\psi_{p+1}(j) = \psi_p(j)$).

Soit

$$\begin{aligned}
\ell=\lim\ n^{-n^0_{p+1}}\Big(Y_1+\sum_{2\leq i\leq m_{p+1}}[\ n^{n_i}+(\sum_{1\leq i'\leq\varphi_{p+1}(i)} P_{i,i'}\ n^{n_{i,i'}}]Y_i\Big).\\
\Big(h_1+\sum_{2\leq j\leq m'_{p+1}}[\ n^{n'_j}+(\sum_{1\leq j'\leq\psi_p(j)} Q_{j,j'}\ n^{n'_{j,j'}}]h_j\Big)
\end{aligned}$$

$$= \lim \Big(\sum_{0\leq k\leq p} n^{n_q^0 - n_{p+1}^0} \Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k} \alpha_{ijk} Y_i.h_j = 0 \Big]_{(k)}$$
$$+ \Big[\sum_{1\leq a\leq \lambda} \alpha_{i_a 1(p+1)} Y_{i_a}.h_1 + \sum_{1\leq a\leq \lambda'} \alpha_{1 j_a (p+1)} Y_1.h_{j_a} \Big]_{(p+1)} + O(\tfrac{1}{n}) \Big)$$
$$= \sum_{1\leq i\leq m_{p+1},\ 1\leq j\leq m'_{p+1}} \alpha_{ij(p+1)} Y_i.h_j \ , \qquad (2.11)$$

alors ℓ est un élément de $E_{(p+1),s}$, où $s \in \{1, ..., n_{p+1}\}$.

2) si $n_p^0 - n' = 1$, alors on remplace $n_i,\ n_{i,i'},\ n'_j$ et $n'_{j,j'}$ respectivement par leurs doubles pour revenir à la condition examinée ci-dessus et pour aboutir à la même conclusion.

<u>Dans le cas 2.</u>

On prend $n_{p+1}^0 = n'$ et on pose

a) pour tout $1 \leq a \leq \lambda$ (resp. $1 \leq b \leq \lambda'$), $\varphi_{p+1}(i_a) = \varphi_p(i_a) + 1,\ n_{i_a,i'_a} = n_{p+1}^0$ et $P_{i_a,i'_a} = \alpha_{i_a 1(p+1)} \in \mathbb{R}$ (resp. $\psi_{p+1}(j_b) = \psi_p(j_b) + 1,\ n'_{j_b,j'_b} = n_{p+1}^0$ et $Q_{j_b,j'_b} = \alpha_{1 j_b (p+1)} \in \mathbb{R}$)

b) $m_{p+1} = m_p + 1$ et $m'_{p+1} = m'_p + 1$

c) $(x_n^{m_{p+1}})_{n\in\mathbb{N}} = (y_n^{m'_{p+1}})_{n\in\mathbb{N}} = (n^{n_{p+1}^0})_{n\in\mathbb{N}}$

d) pour tout $i \in \{2, ..., m_{p+1}\} \setminus \{i_1, ..., i_\lambda\}$ (resp. $j \in \{2, ..., m'_{p+1}\} \setminus \{j_1, ..., j'_\lambda\}$), $\varphi_{p+1}(i) = \varphi_p(i)$ (resp. $\psi_{p+1}(j) = \psi_p(j)$).

D'où, si on pose

$$\ell = \lim\ n^{-n_{p+1}^0} \Big(Y_1 + \sum_{2\leq i\leq m_{p+1}} [\ n^{n_i} + (\sum_{1\leq i'\leq \varphi_{p+1}(i)} P_{i,i'}\ n^{n_{i,i'}}] Y_i + n^{(n_{m_{p+1}})} Y_{m_{p+1}} \Big).$$
$$\Big(h_1 + \sum_{2\leq j\leq m'_{p+1}} [\ n^{n'_j} + (\sum_{1\leq j'\leq \psi_{p+1}(j)} Q_{j,j'}\ n^{n'_{j,j'}}] h_j + n^{(n'_{m'_{p+1}})} h_{m'_{p+1}} \Big)$$
$$= \lim \Big(\sum_{0\leq k\leq p} n^{n_q^0 - n_{p+1}^0} \Big[\sum_{1\leq i\leq m_k,\ 1\leq j\leq m'_k} \alpha_{ijk} Y_i.h_j = 0 \Big]_{(k)}$$
$$+ \Big[\sum_{1\leq i\leq m_{p+1},\ 1\leq j\leq m'_{p+1}} \alpha_{ij(p+1)} Y_i.h_i \Big]_{(p+1)} + O(\tfrac{1}{n}) \Big)$$
$$= \sum_{1\leq i\leq m_{p+1},\ 1\leq j\leq m'_{p+1}} \alpha_{ij(p+1)} Y_i.h_j \ , \qquad (2.12)$$

alors ℓ est un élément de $E_{(p+1),s}$, où $s \in \{1, ..., n_{p+1}\}$.

L'étude des cas 3 et cas 4 (resp. cas 5) est similaire à celle du cas 2 (rep. cas 1). Pour achever la démonstration, il suffit de signaler que la construction de suites

$(X_n(\ell))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_n(\ell))_{n\in\mathbb{N}^*}$ se déduit immédiatement des formules (2.11) et (2.12), et que l'équation (2.9) est une conséquence directe de l'équation (2.10).

C.Q.F.D.

Corollaire 2.3.2. *Pour tous les* $1 \leq p \leq p_0$ *et* $1 \leq s \leq n_p$ *, nous avons*

$$E'_{p,s} = E_{p,s} \quad et \quad N'_p = N_p. \qquad \diamondsuit$$

Finalement, nous obtenons le résultat suivant

Théorème 2.3.1. *Nous avons*

$$N_0 \subset N_1 \subset ..... \subset N_k \subset ..... \subset N_p = cor(g^*). \qquad \diamondsuit$$

L'exemple qui suit est une recherche en dimension huit d'un type d'éléments du cortex de niveau inférieur ou égal à quatre montrant les relations polynomiales liant les coefficients de ces éléments avec ceux de leurs contraintes.

Exemple 2.3.1. On suppose que $\dim(Z(g)) = 3$ et $\dim(H) = 5$. Soient $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$ et (h_1, h_2, h_3) deux bases orthogonales respectivement de H et $(Z(g))^*$. Considérons l'élément de $cor(g^*)$

$$\ell = Y_1.(\alpha_{124}h_2 + \alpha_{134}h_3) + \alpha_{234}Y_2.h_3 + Y_3.h_3 + Y_4.h_2 + (\alpha_{314}Y_3 + \alpha_{414}Y_4 + Y_5).h_1$$

sous les contraintes

$$Y_1.h_1 = 0$$
$$Y_1.h_2 + Y_2.h_1 = 0$$
$$Y_1.(\alpha_{122}h_2 + h_3) + Y_2.h_2 + Y_3.h_1 = 0$$

et
$$Y_1.(\alpha_{123}h_2 + \alpha_{133}h_3) + Y_2.h_3 + Y_3.h_2 + (\alpha_{313}Y_3 + Y_4).h_1 = 0.$$

Nous montrons que $\alpha_{234} = \alpha_{133} - \alpha_{313} - \alpha_{122}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$c_n\Big(Y_1 + x_n^2Y_2 + [(x_n^2)^2 + (\alpha_{313} + \alpha_{122})(x_n^2)^3 + P_1(x_n^2)^4]Y_3 + [(x_n^2)^3 + P_2(x_n^2)^4]Y_4 + (x_n^2)^4Y_5\Big).\Big(h_1 + [x_n^2 + \alpha_{122}(x_n^2)^2 + (\alpha_{123} + (\alpha_{122})^2)(x_n^2)^3 + Q_1(x_n^2)^4]h_2 + [(x_n^2)^2 + (\alpha_{133} + \alpha_{122})(x_n^2)^3 + Q_2(x_n^2)^4]h_3\Big)$

$= c_n[Y_1.h_1] + c_nx_n^2[Y_1.h_2 + Y_2.h_1] + c_n(x_n^2)^2[Y_1.(\alpha_{122}h_2 + h_3) + Y_2.h_2 + Y_3.h_1]$
$\quad + c_n(x_n^2)^3[Y_1.(\alpha_{123}h_2 + \alpha_{133}h_3) + Y_2.h_3 + Y_3.h_2 + (\alpha_{313}Y_3 + Y_4).h_1]$
$\quad + c_n(\alpha_{123} + (\alpha_{122})^2)(x_n^2)^4[Y_2.h_2 = -Y_1.(\alpha_{122}h_2 + h_3) - Y_3.h_1]$
$\quad + c_n(\alpha_{133} + \alpha_{122})(x_n^2)^4[Y_2.h_3]$
$\quad + c_n(2\alpha_{122} + \alpha_{313})(x_n^2)^4[Y_3.h_2 = -Y_1.(\alpha_{123}h_2 + \alpha_{133}h_3) - Y_2.h_3 - (\alpha_{313}Y_3 + Y_4).h_1]$

$$+c_n(x_n^2)^4[Y_3.h_3 + Y_4.h_2]$$
$$+c_n(x_n^2)^4[Y_1.(Q_1h_2 + Q_2h_3) + (P_1Y_3 + P_2Y_4 + Y_5).h_1] + o(c_n(x_n^2)^4)$$

où $Q_1 = \alpha_{124} + \alpha_{122}(\alpha_{123} + (\alpha_{122})^2) + \alpha_{123}(2\alpha_{122} + \alpha_{313})$,

$Q_2 = \alpha_{134} + (\alpha_{123} + (\alpha_{122})^2) + \alpha_{133}(2\alpha_{122} + \alpha_{313})$

$P_1 = \alpha_{314} + (\alpha_{123} + (\alpha_{122})^2) + \alpha_{313}(2\alpha_{122} + \alpha_{313})$

et $P_2 = \alpha_{414} + 2\alpha_{122} + \alpha_{313}$.

Donc en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n = n^4$ et $x_n^2 = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\ell \quad = \quad & \lim \Big(n^4[Y_1.h_1] + n^3[Y_1.h_2 + Y_2.h_1] + n^2[Y_1.(\alpha_{122}h_2 + h_3) + Y_2.h_2 + Y_3.h_1] \\ & +n[Y_1.(\alpha_{123}h_2 + \alpha_{133}h_3) + Y_2.h_3 + Y_3.h_2 + (\alpha_{313}Y_3 + Y_4).h_1] \\ & +Y_1.(\alpha_{124}h_2 + \alpha_{134}h_3) + \alpha_{234}Y_2.h_3 + Y_3.h_3 + Y_4.h_2 + (\alpha_{314}Y_3 + \alpha_{414}Y_4 \\ & \qquad\qquad +Y_5).h_1 \\ & +O(\frac{1}{n})\Big),\end{aligned}$$

avec $\alpha_{234} = \alpha_{133} - \alpha_{313} - \alpha_{122}$. $\diamondsuit$

Remerciements : Nous remercions vivement le Professeur Jean Ludwig de l'Université de Metz (France) et les Professeurs Mabrouk Ben Ammar et Ali Baklouti de l'Université de Sfax (Tunisie) pour leurs précieuses suggestions et fructueux encouragements.

Références

[1] A. Baklouti, *Le cortex en dimension six*, *Centre Universitaire de Luxembourg,* 321, Fascicule V (1993) 7-45.

[2] A. Baklouti, *On the cortex of connected simply connected nilpotent Lie groups*, *Russian Journal of Mathematical Phisics,* Vol. 5 (1998) 3: 281-293.

[3] M. Bekka and E. Kanuith, *Irreductible representation of locally compact group that cannot be Hausdorff separated from the identity representation*, *J. Reine Angew. Math.* (1988) 385: 203-220.

[4] J. Boidol, J. Ludwig and D. Müller, *On infinitely small orbits*, *Studia Mathemathica,* T. LXXXVIII (1988).

[5] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, *Uspekhi Mat. Nank,* (1962) 17 (4): 57-110 (in Russian).

[6] A. M. Vershik et S. I. Karpushev, *Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity, and conditionally positive definite functions, Math. Sb.,* (1984) 47 (2).

Faculté des Sciences de Sfax
Département de Mathématiques
Route de Soukra km 3.5, B.P. 802
3018 Sfax
Tunisie
e-mail: benfraj_nizar@yahoo.fr
e-mail: Hatem.Megdiche@fsg.rnu.tn