Seminar Analytische Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010, Dienstag, 16-18 Uhr, T03 R03 D75

Universität Duisburg-Essen — Prof. Dr. Gabor Wiese
Institut für Experimentelle Mathematik — Dr. Johan Bosman

Die analytische Zahlentheorie ist ein Teilgebiet der Zahlentheorie, in dem man zahlentheoretische Probleme durch Verwendung analytischer Methoden zu lösen versucht. Es gibt viele Arten solcher Probleme. Im Seminar werden wir uns hauptsächlich mit der Verteilung der Primzahlen beschäftigen. Wir benutzen dabei die Theorie der holomorphen Funktionen einer komplexen Variable und deshalb werden wir zu Beginn des Seminars Funktionentheorie behandeln.

Während des Seminars werden wir unter anderem den *Primzahlsatz* beweisen:

Satz 1 (Primzahlsatz)**.** *Sei $\pi(x)$, für $x \in \mathbb{R}$, die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$. Dann gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \to \infty, \quad \textit{d.h.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Dieser Satz wurde 1793 von Gauß vermutet und 1896 unabhängig von Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesen. In beiden Beweisen spielt die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion eine sehr wichtige Rolle. Diese Funktion ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s > 1$ definiert durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots.$$

Die analytischen Eigenschaften der Funktion $\zeta(s)$, die wichtig für den Primzahlsatz sind, sollen im Detail studiert werden, zum Beispiel, dass $\zeta(s)$ eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} - \{1\}$ hat.

Ein anderer Satz, den wir beweisen werden, ist der Primzahlsatz für arithmetische Folgen:

Satz 2 (Primzahlsatz für arithmetische Folgen)**.** *Seien n und a teilerfremde positive ganze Zahlen. Bezeichne für $x \in \mathbb{R}$ mit $\pi_{n,a}(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ mit $p \equiv a \bmod n$. Dann gilt*

$$\pi_{n,a}(x) \sim \frac{1}{\phi(n)} \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Hier ist $\phi(n)$ die Anzahl der Zahlen $m \in \{1, \ldots, n\}$, die zu n teilerfremd sind.

Für den Beweis brauchen wir, außer der Zeta-Funktion, die sogenannten Dirichletschen L-Reihen. Sei $\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein nicht trivialer Gruppenhomomorphismus. Dann ist die Funktion $L(\chi, s)$ definiert durch die Reihe $L(\chi, s) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) n^{-s}$, die für $\Re s > 0$ konvergiert. Die wichtigste analytische Eigenschaft der Funktionen $L(\chi, s)$, die wir für Satz 2 benötigen, ist $L(\chi, 1) \neq 0$. Wir werden diese Formel beweisen und sehen, warum sie Satz 2 impliziert. Wenn es am Ende des Seminars noch Zeit gibt, behandeln wir für quadratisches χ die *Klassenzahlformel*, die $L(\chi, 1)$ mit der Klassenzahl eines quadratischen Körpers verbindet.

Vorbesprechung:

Die Vorbesprechung findet am Montag, dem 20.7.2009, um 14.15 Uhr in T03 R02 D81 statt. Sollten Sie an diesem Termin verhindert sein oder ihn verpasst haben, senden Sie bitte eine E-Mail.

Weitere Informationen und Hilfestellungen:

G. Wiese (Büro ES 06 im IEM, Tel.: (0201) 183-7620, E-Mail: `gabor.wiese@uni-due.de`).
J. Bosman (Büro ES 07 im IEM, Tel.: (0201) 183-7654, E-Mail: `johan.bosman@uni-due.de`).