Seminar zur analytischen Zahlentheorie

Organisatoren: Gabor Wiese und Johan Bosman

Wintersemester 2009/2010

Die analytische Zahlentheorie ist ein Teilgebiet der Zahlentheorie, in dem man zahlentheoretische Probleme durch Verwendung analytischer Methoden zu lösen versucht. Während des Seminars werden wir, unter anderem, den *Primzahlsatz* beweisen:

Satz 1 (Primzahlsatz)**.** *Sei $\pi(x)$, für $x \in \mathbb{R}$, die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$. Dann gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \to \infty, \quad \textit{d.h.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Dieser Satz wurde 1793 von Gauß vermutet und 1896 unabhängig von Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesen. In beiden Beweisen spielt die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion eine sehr wichtige Rolle. Diese Funktion ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s > 1$ definiert durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots .$$

Die analytischen Eigenschaften der Funktion $\zeta(s)$, die wichtig für den Primzahlsatz sind, sollen im Detail studiert werden, zum Beispiel, dass $\zeta(s)$ eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} - \{1\}$ hat.

Schritt für Schritt werden wir die Theorie, die für den Beweis des Primzahlsatzes benötigt wird, behandeln. Von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird erwartet, dass sie selbständig ihren Teil der Theorie studieren und einen Vortrag darüber halten. Die Studenten werden gebeten, mindestens eine Woche vor dem Vortrag einem der Organisatoren die Notizen des Vortrags zu zeigen und zusammen mit ihm den Vortrag durchzunehmen.

Unten folgt ein Programm. Abhängig von der Anzahl der Teilnehmer und ihrer Vorkentnisse können noch kleine Veränderungen am Programm vorgenommen werden.

1 Tschebyschows Satz

Tschebyschow hat 1850 bewiesen, dass es bestimmte explizite Zahlen c und C gibt, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$c\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq C\frac{x}{\log x}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist völlig elementar und nicht schwierig zu verstehen. Das Ziel dieses Vortrags ist dann auch, diesen Satz zu beweisen. Der/die Vortragende soll dabei u.a. die folgenden Funktionen/Notationen einführen und benutzen: Von Mangoldts Funktion $\Lambda(n)$ und Tschebyschows Funktionen $\theta(x)$ und $\psi(x)$.

Der/die Vortragende sollte auch Bertrands Postulat beweisen: Für jedes $n > 1$ existiert mindestens eine Primzahl zwischen n und $2n$. Die Methoden für den Beweis sind den Methoden für den Beweis von Tschebyschows Satz sehr ähnlich.

Verweise für diese Materie sind z.B. Sektionen 22.1 bis 22.4 in [2] (siehe Kapitel 1 für die Notationen, die in Kapitel 22 benutzt werden) und Sektionen 1.6 und 2.4 in [3] (Satz 2.3.4 für die Definition von $\Lambda(n)$).

2 Funktionentheorie

Zwei oder drei Vorträge über Funktionentheorie sollen gehalten werden. Das Ziel dieser Vorträge ist, in die Funktionentheorie einzuführen bzw. Ihre Kenntnis der Funktionentheorie aufzufrischen. Wichtige Themen, die hier behandelt werden sollen, sind:

1. Grundlegende Definitionen und Beispiele von holomorphen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}$, wobei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

2. Der Cauchysche Integralsatz.

3. Die Cauchysche Integralformel.

4. Taylorreihen.

5. Laurentreihen und Singularitäten.

6. Der Residuensatz.

7. Analytische Fortsetzung.

8. Konvergenzsätze. Der folgende Satz und seine Korollare über Reihen und Produkte sollen behandelt werden:

   Satz 2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen auf U. Dann ist ihr Limes f holomorph auf U und für jedes $k \geq 0$ gilt*

   $$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z).$$

   Auch der folgende Satz soll zusammen mit seinen Verallgemeinerungen auf uneigentliche Integrale und nicht-stetige Funktionen behandelt werden.

   Satz 3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $F\colon [a,b] \times U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass $F(t,z)$ holomorph auf U ist für jedes $t \in [a,b]$. Dann ist*

   $$G(z) := \int_a^b F(t,z)dt$$

   holomorph auf U und für die Ableitungen gilt

   $$G^{(k)}(z) = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k F(t,z)dt.$$

Diese Themen werden in jedem Buch über Komplexe Funktionentheorie behandelt, z.B. [4] oder [1].

3 Dirichletreihen und arithmetische Funktionen

Über diese Themen werden zwei Vorträge gehalten. Die folgenden Dinge werden behandelt (die Verweise sind alle aus [3]):

1. Abelsche Summation: Propostion 1.3.1 und Satz 1.3.5.
2. Dirichletreihen: Propositionen 1.7.2, 1.7.3, 1.7.7, 1.7.8, 1.7.10.
3. Konvolutionen: Proposition 1.8.1.
4. Eulerprodukte: Satz 2.1.3.
5. Möbius-Inversion: Korollar 2.2.6.
6. Satz 2.3.4:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

4 Dirichlet-Charaktere und Gaußsche Summen

Diese Themen sind wichtig für die L-Funktionen mit Charakter. Verweise sind Sektion 4.1 für Charaktere endlicher Gruppen, Sektion 4.2 für Dirichlet-Charaktere und Übung 4.2.11 für Gaußsche Summen, alle aus [3].

5 Nichtverschwindung der Riemannschen Zetafunktion und der L-Funktionen

Dieser Vortrag soll die Sektionen 3.1 und 4.3 von [3] behandeln, besonders die folgenden Sätze: 3.1.1, 3.1.12, 4.3.14, 4.3.18.

6 Taubersätze

Taubersätze sind ziemlich allgemeine Sätze, die die analytischen Eigenschaften einer Funktion mit den asympotischen Eigenschaften ihrer Koeffizienten verbinden. Sektion 3.3, besonders Satz 3.3.4 aus [3].

7 Primzahlsätze

Wir haben jetzt genug Theorie entwickelt, um den Primzahlsatz und seine Variante für aritmetische Folgen zu beweisen. Sätze 3.4.3 und 4.4.4 aus [3].

8 Funktionalgleichung

Machen wir, wenn es genug Teilnehmer gibt.

Literatur

[1] R. E. Greene und S. G. Krantz. *Function theory of one complex variable.* John Wiley and sons, New York, 1997.

[2] G. H. Hardy und E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers (4th edition).* Oxford University Press, 1975.

[3] G. J. O. Jameson. *The Prime Number Theorem.* LMS Student Texts **53**, Cambridge University Press, 2003.

[4] S. Lang. *Complex Analysis.* Graduate Texts in Mathematics **103**, Springer-Verlag, 1999.