Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2011

Universität Duisburg-Essen, Institut für Experimentelle Mathematik
Prof. Dr. Gabor Wiese

Blatt 1

Abgabe: Beginn Vorlesung am Montag, 11.4.2011. Besprechung: Freitag, 15.4.2011, in Übungsgruppe.

1. (2 Punkte) *Nachrechnen von Körperaxiomen der komplexen Zahlen.*

   (a) Beweisen Sie, dass die Multiplikation komplexer Zahlen assoziativ ist, dass also für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

   (b) Beweisen Sie, dass das Distributivgesetz in den komplexen Zahlen gültig ist, dass also für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

2. (2 Punkte) *Invarianz von Nullstellen reeller Polynome unter komplexer Konjugation.* Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom, dessen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ reelle Zahlen sind. Sei $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $f(w) = 0 \Leftrightarrow f(\overline{w}) = 0$.

3. (4 Punkte) *Rechnen mit komplexen Zahlen.*

   (a) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von: $\left(\frac{3+5i}{1+2i}\right)^2$ und $(1+3i)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Bestimmen Sie die Polardarstellung (also $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$) von:

   $$(1 + i\sqrt{3})^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Geben Sie das Argument im Bogenmaß exakt (d.h. nicht gerundet) an.

4. (4 Punkte) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

   (a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

   (b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

   (c) $\overline{\overline{z}} = z$.

   (d) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

5. (4 Punkte) Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom, dessen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ komplexe Zahlen sind, wobei wir $a_n \neq 0$ fordern. Zeigen Sie, dass es eine Konstante C derart gibt, dass die Ungleichung

   $$\frac{|a_n z^n|}{2} < |f(z)| < 2|a_n z^n|$$

   für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > C$ gilt.