Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2011

Universität Duisburg-Essen, Institut für Experimentelle Mathematik **Blatt 2**
Prof. Dr. Gabor Wiese

Abgabe: Beginn Vorlesung am Mittwoch, 20.4.2011. Besprechung: Freitag, 29.4.2011, in Übungsgruppe.

1. (4 Punkte) *Differenzierbarkeit der komplex konjugierten Funktion.* Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die in $a \in D$ komplex differenzierbar ist. Setze $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in D\}$ und
$$g : \overline{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{f(\overline{z})}.$$
Zeigen Sie, dass g in $\overline{a}$ komplex differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung in diesem Punkt.

2. (4 Punkte) *Cayley-Abbildung.* Es seien $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die *obere Halbebene* und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die *offene Einheitskreisscheibe*. In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass die beiden Mengen aus funktionentheoretischer Sicht 'sehr ähnlich' sind. Dazu betrachten wir die *Cayley-Abbildung*
$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{H}$ holomorph und injektiv ist.

   (b) Zeigen Sie, dass das Bild von f gleich $\mathbb{E}$ ist, bestimmen Sie die Umkehrabbildung $g : \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ und zeigen Sie, dass diese auf ganz $\mathbb{E}$ holomorph ist.

3. (4 Punkte) *Stetigkeit und Differenzierbarkeit.* Bestimmen Sie alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, an denen die folgenden Funktionen stetig sind. Bestimmen Sie auch alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, an denen die Funktionen komplex differenzierbar sind, und berechnen Sie dort die Ableitungen:
$f(z) = \overline{z}$, $f(z) = z^2\overline{z}$, $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$, $f(z) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z)$, $f(z) = z\overline{z}$, $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}$ (für $z \neq 0$).
Hinweis: Sie dürfen die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen und Sätze zu Stetigkeit und komplexer Differenzierbarkeit aus der Vorlesung verwenden.

4. (4 Punkte) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen. Setze $c_n := \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert und dass gilt:
$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$
Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$, so dass nach Definition $\lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k =: B$ gilt. Leiten Sie eine Abschätzung folgender Form her:
$$\Big|\sum_{k=0}^{n} a_k B - \sum_{k=0}^{n} c_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|B - B_{n-k}|.$$