Seminar/Hauptseminar über Homologische Algebra
(mit Dr. G. Wiese)

Zeit und Ort: 2 st., Mi 8–10, M 102.

Repetitorium zum Seminar: 2 st., Mi 10–12, M 115.

Vorkenntnisse: Lineare Algebra.

Inhalt: Homologische Algebra ist die "Differentialrechnung der Algebra". Sie misst die Abweichung eines Funktors von Exaktheit durch seine Ableitungen. Homologische Algebra stellt eine wichtige Technik dar, die aufgrund ihrer allgemeinen Natur in vielerlei Bereichen der Mathematik Anwendungen findet. Zu nennen wären zum Beispiel algbraische Zahlentheorie, algebraische Geometrie, algebraische Topologie, Funktionentheorie, Differentialgeometrie etc.

Ziele: Die Maschinerie der homologischen Algebra wird im ersten Teil des Seminars für die Kategorie der Moduln über einem (nicht notwendig kommutativen) Ring in dem Umfang entwickelt, wie sie für viele Anwendungen benötigt wird. Konkret ist die Stoffauswahl dieses Bereiches an dem orientiert, was Hartshorne in [1], III.1, für die Anwendungen in der algebraischen Geometrie voraussetzt. Um ein Einsatzgebiet der homologischen Algebra kennen zu lernen, werden wir das technisch weniger aufwendige Beispiel der Gruppenkohomologie studieren, wobei wir uns bei der Stoffauswahl am Beginn von Neukirchs Buch [3] orientieren. Dabei werden wir sehen, dass Gruppenkohomologie sowohl durch konkrete "Ketten" beschrieben werden kann als auch abstrakt als abgeleitete Funktor-Kohomologie. Schließlich soll das Konzept der Spektralfolgen anhand der Hochschild-Serre-Spektralfolge eingeführt werden.

Anmeldung: Die Anmeldung findet bei der Vorbesprechung am Dienstag, dem 25. Juli 2006, um 13.00 Uhr s.t. im Raum M 101 statt oder danach, falls noch Plätze frei sind, bei Gabor Wiese (Zimmer 115, Tel.: (0941) 943-2793, E-mail: `gabor.wiese@mathematik.uni-regensburg.de`)

Programm

Obwohl zwei Puffertermine eingeplant sind, kann die vorgegebene Zeit (90 min) nur in Ausnahmefällen überschritten werden. Sollte die Vortragszeit nicht auszureichen scheinen, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Im Folgenden seien stets Λ ein (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Eins, R ein kommutativer Ring mit Eins, G eine (zumeist endliche) Gruppe und M ein Λ-Links-Modul. (Im Gegensatz zu [4] wollen wir hauptsächlich Λ-Links-Moduln betrachten.)

(1) <u>18.10.2006: Die abelsche Kategorie der Λ-Moduln.</u>

Definiere Kategorien ([4], A.1.1). Erläutere kurz die Kategorie der Mengen (**Mg**). Wiederhole die Definition eines Λ-Moduls (links und rechts) und eines Λ-Modulhomomorphismus und zeige, dass die Λ-Links-Moduln eine Kategorie ($\Lambda-$**Mod**) bilden. Erwähne kurz die Kategorie der abelschen Gruppen (**Ab**) als Spezialfall ($\mathbb{Z}$-Moduln).

Definiere Monomorphismen, Epimorphismen und Isomorphismen ([4], A.1.5 und der Text kurz davor). Definiere initiale, terminale und Null-Objekte sowie Kern und Kokern ([4], A.1.6) in Kategorien und erläutere für einen der beiden Fälle, warum die Definition mit der gewöhnlichen im Falle der Λ-Moduln übereinstimmt. Definiere die entgegengesetzte Kategorie ([4], A.1.7) und erläutere diese am Beispiel der Λ-Links-Moduln. Definiere Produkte und Koprodukte ([4], A.1.9). Zeige, dass sie in der Kategorie ($\Lambda-$**Mod**) existieren (direktes Produkt und direkte Summe).

Definiere additive und abelsche Kategorien ([4], A.4.1 und A.4.2) und zeige, dass ($\Lambda-$**Mod**) eine abelsche Kategorie ist.

Die Beweise zu Λ-Moduln können z.B. in [2] nachgelesen werden.

(2) <u>25.10.2006: Der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot,\cdot)$.</u>

Definiere den Begriff des Funktors (Beginn von [4], A.2), der Kovarianz und der Kontravarianz ([4], A.2.5). Definiere auch den Begriff der additiven Funktoren ([4], S. 5). Erläutere als Beispiel kurz vergessliche Funktoren ([4], A.2.2). Wiederhole den Begriff der exakten Folge (in abelschen Kategorien und für ($\Lambda-$**Mod**)). Definiere den Begriff des exakten, links-exakten und rechts-exakten Funktors ([4], 1.6.6).

Behandele [4], Prop. 1.6.8 und Cor. 1.6.9.

Definiere und konstruiere freie Λ-Moduln. Definiere projektive Objekte ([4], S. 33) und injektive Objekte ([4], S. 38) in abelschen Kategorien. Behandele [4], Prop. 2.2.1, Lemma 2.2.3, Lemma 2.3.4.

Beweise: $\mathrm{Hom}_{R[G]}(R, M) \cong M^G$ (mit M^G, den G-Invarianten).

Die Beweise dürfen wahlweise in kategorieller Sprache oder konkret für Λ-Moduln geführt werden.

(3) <u>08.11.2006: Injektive Moduln und der Funktor $\cdot \otimes_\Lambda \cdot$.</u>

Definiere adjungierte Funktoren ([4], A.6.1). Definiere das Tensorprodukt für Λ-Moduln und behandele [2], III.7 (ignoriere "Bifunktoren").

Beweise: $R \otimes_{R[G]} M \cong M_G$ (mit M_G, den G-Koinvarianten).

Beweise, dass $(\Lambda-\mathbf{Mod})$ genügend viele injektive Objekte enthält ([4], S. 38 unten, 2.3.1, 2.3.2, S. 39 unten inklusive Ex. 2.3.2; weiter mit 2.3.8, 2.3.10, 2.3.11 und Ex. 2.3.5).

(4) <u>15.11.2006: Kettenkomplexe, (Ko-)Homologie und Gruppen(ko)homologie.</u>

Definiere (Ko-)Kettenkomplexe, (Ko-)Homologie, Morphismen von (Ko-)Kettenkomplexen und die Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe ([4], Def. 1.1.1). Ferner Def. 1.1.2, Exercise 1.1.5. Behandele auch beschränkte (Ko-)Kettenkomplexe ([4], S. 3).

Erläutere, warum die Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe von Λ-Moduln eine abelsche Kategorie ist (vgl. [4], 1.2.3).

Behandele die Quer-Auflösungen (*bar resolutions*) (Definition auf S. 177f. in [4]). Zeige, dass sie exakt sind.

In diesem Vortrag soll auch die (erste) Definition von Gruppenhomologie und Gruppenkohomologie gegeben werden, nämlich als die (Ko-)Homologiegruppen des Komplexes, den man aus der normalisierten Quer-Auflösung durch Anwendung des Funktors $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ (für Homologie, Notation $H_*(G, M)$) bzw. des Funktors $\mathrm{Hom}_{R[G]}(\cdot, M)$ (für Kohomologie, Notation $H^*(G, M)$) erhält. Gib die Differentiale für kleine Indizes als Beispiel explizit an.

Berechne $H^0(G, M)$, $H_0(G, M)$ für einen allgemeinen $R[G]$-Modul M und $H^1(G, M)$ für M mit trivialer G-Operation.

(5) <u>22.11.2006: Lange exakte Folgen und Kettenhomotopien.</u>

Beweise das Schlangenlemma (Don't keep the proof to yourself!) und das Fünfer-Lemma ([4], S. 11ff). Beweise nun [4], Thm. 1.3.1 und Prop. 1.3.4. Dies soll alles in der Kategorie der Λ-Moduln ausgeführt werden (also nicht in allgemeinen abelschen Kategorien, obwohl es für diese auch gilt).

Behandele als Nächstes Kettenhomotopien: [4], Def. 1.4.3, 1.4.4. Die wichtige Anwendung ist [4], Lemma 1.4.5, das auch bewiesen wird.

Formuliere jeweils auch entsprechende Aussagen für Kokettenkomplexe.

(6) <u>29.11.2006: δ-Funktoren und Auflösungen.</u>

Formalisiere die Ergebnisse des vorherigen Vortrags im Begriff des (ko-)homologischen δ-Funktors ([4], 2.1.1).

Führe den Begriff der natürlichen Transformation von Funktoren ein ([4], S. 423) und erläutere ihn an den Beispielen [4], A.3.1.1 und A.3.1.2. Erkläre [4], Exercise 2.1.1.

Führe den Begriff des Morphismus von δ-Funktoren ein und sage, wann diese universell heißen ([4], S. 32).

Definiere, was man unter linken, rechten, projektiven und injektiven Auflösungen versteht ([4], S. 34 und S. 40). Beweise [4], 2.3.6 und 2.3.7.

(7) <u>06.12.2006: Rechts- und linksabgeleitete Funktoren.</u>

Definiere linksabgeleitete und rechtsabgeleitete Funktoren zu rechts- bzw. linksexakten Funktoren ([4], S. 43 und S. 49).

Formuliere [4], 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5 und 2.4.6 und jeweils auch "rechtsabgeleitete" Analoga. Beweise nur die Analoga (siehe auch [4], Abschnitt 2.5). Dazu wird eine kohomologische Form des Hufeisenlemmas (2.2.8) benötigt.

Definiere auslöschbare und ko-auslöschbare Funktoren ([4], S. 49). Formuliere 2.4.7 und ein "rechtsabgeleitetes" Analogon. Dieses soll mittels auslöschbarer Funktoren bewiesen werden, wie in Aufgabe [4], 2.4.5, erklärt wird.

Gib als Anwendung die Definition von Tor und Ext an ([4], 2.6.4 und 2.5.2). Identifiziere die Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}^*_{R[G]}(R, M)$ mit den rechtsabgeleiteten Funktoren zum Funktor $M \mapsto M^G$ (den G-Invarianten, siehe Vortrag vom 25.10.2006). Formuliere etwas Entsprechendes für Tor (siehe Vortrag vom 8.11.2006). Diese beiden Funktoren geben uns eine zweite Definition der Gruppenkohomologie bzw. der Gruppenhomologie. Wir wissen aber noch nicht, dass beide übereinstimmen.

(8) 13.12.2006: Ext-Gruppen.

Beweise zunächst Aufgaben [4], 2.5.1 und 2.5.2.

Zeige den Zusammenhang zwischen den Ext-Gruppen und Erweiterungen auf ([4], Thm. 3.4.3).

Definiere Doppelkomplexe und Totalkomplexe ([4], 1.2.4 - 1.2.6). Behandele Abbildungskegel ([4], Exercise 1.2.8, 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3 und 1.5.4, aber für Kokettenkomplexe). Beweise nun [4], Thm. 2.7.6, und formuliere Thm. 2.7.2.

Folgere, dass die zwei gegebenen Definitionen von Gruppenkohomologie übereinstimmen. Wie ist es mit der Gruppenhomologie?

(9) 20.12.2006: Gruppenkohomologie I.

Erkläre [4], 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.8, 6.1.9, Aufgaben 6.1.3 und 6.1.4, Thm 6.1.11, Aufgabe 6.1.5 (Teile 1. und 2.). Außerdem 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3, 6.2.6, 6.2.7. Die Beweise dürfen auch mittels Koketten der normalisierten Quer-Auflösung geführt werden (bei einigen Beweisen mag dies einfacher erscheinen).

(10) 10.01.2006: Gruppenkohomologie II.

Definiere Tate-Gruppenkohomologie ([4], 6.2.4) und beweise die wichtige Aufgabe 6.2.3 und die Anwendung 6.2.5.

Definiere induzierte und koinduzierte Moduln ([4], 6.3.1) und beweise Shapiros Lemma (6.3.2) sowie 6.3.5 und 6.3.6.

Definiere Restriktion und Corestriktion, Inflation und Coinflation ([4], 6.7.1, 6.7.3). Gib von der Restriktion und der Inflation auch eine Beschreibung auf normalisierten Koketten der Quer-Auflösung an. Diskutiere ferner 6.7.6, 6.7.7 und 6.7.9.

Definiere schließlich die Transfer-Abbildungen (6.7.16) und beweise Lemma 6.7.17. Die Transfer-Abbildungen werden häufig auch Corestriktion (im kohomologischen Fall) und Restriktion (im homologischen Fall) genannt. Beweise Aufgabe 6.7.8.

(11) 17.01.2006: Spektralfolgen I.

Gib die Definition einer kohomologischen Spektralfolge. Gib die 5-Term exakte Folge der Terme niedrigen Grades an. Konstruiere dann die Spektralfolgen (für Spektralfolgen im ersten Quadranten) eines Doppelkomplexes, die im folgenden Vortrag benötigt werden. Literatur: [4], 5.1-5.6, aber nur das Benötigte.

(12) 24.01.2006: Spektralfolgen II.

Beweise Grothendiecks Spektralfolgensatz ([4], 5.8.3). Konstruiere dazu eine rechte Cartan-Eilenberg-Auflösung (5.7.9).

Folgere die Hochschild-Serre-Spektralfolge ([4], 6.8.2) und Korollar 6.8.3.

(13) 31.01.2006: Puffertermin 1.

(14) 07.02.2006: Puffertermin 2.

Literatur

[1] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Springer, New York, 1977.

[2] P. J. Hilton, U. Stammbach. *A course in homological algebra.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 4. Springer-Verlag, New York, 1997. xii+364 pp.

[3] J. Neukirch. *Klassenkörpertheorie*, Bonner Math. Schriften No. 26 1967 vi+118 pp.

[4] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.