Wiskunde 1A - groep 3 (Gabor Wiese) 16/09/2003

Wat informatie:

- Dit vak bestaat uit een werk- en instructiecollege, verplicht en vrijwillig huiswerk, één tussentoets op blackboard en één tentamen aan het eind.
- Voor het cijfer telt het tentamen waarschijnlijk voor 80% en huiswerk en tussentoets samen voor 20%.
- Er zal nooit veel verplicht huiswerk zijn. Maar de ingeleverde opgaven moeten helemaal uitgewerkt en "mooi" (leesbaar en niet chaotisch) opgeschreven zijn. Als het kan, probeer de oplossing op één A4-bladzijde te schrijven. Het huiswerk wordt aan het begin van iedere les ingeleverd.

Nuttige formules:

- Blijkbaar kunnen mensen alleen maar opgaven over limieten verzinnen die je met deze makkelijke formules kan oplossen:

$$\begin{aligned}
&(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \\
&(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
&x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)
\end{aligned}$$

- Sinus- en cosinusformules:

$$\begin{aligned}
&\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
&\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
&\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \text{Stelling van Pythagoras(!)} \\
&\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{(dat is de definitie)}
\end{aligned}$$

Doelen deze week:

- Limiet, continuïteit in een punt en de raaklijn introduceren.
- Berekenen van de limiet oefenen.

Huiswerk:

- Verplicht huiswerk (voor 23/09/2003):

  (a) Bereken de volgende limiet:
$$\lim_{t\to 3} \frac{t^3 - 9t}{t^2 - 9}$$
  (b) Zij $c > 0$ een constante. Bereken de volgende limiet:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{c+x} - \sqrt{c-x}}{x}$$

- Vrijwillig huiswerk om te oefenen (aanbevolen!):

  – Uit paragraaf 2.2 opgaven 6,20,27,44.

  – Uit paragraaf 2.3 opgaven 1,2,4,9,18,24. Maak gebruik van
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

  – (Variatie van opgave 7): Zij $c > 0$ een constante. Bereken de volgende limiet:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(cx)}{x}$$

  – (Variatie van opgave 20): Laat $m > 0$ en $n > 0$ constanten zijn. Bereken de volgende limiet:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(mx)}{nx}$$

- We zullen aanstaande dinsdag hoofdstuk 2 afmaken. Dus is het ook huiswerk hoofdstuk 2 thuis te lezen.

- Het is altijd huiswerk de colleges te herhalen.

1 Limieten en continuïteit

Definitie 1.1 *Zij f een reëelwaardige functie en stel dat haar domein $(l, a) \cup (a, r)$ bevat voor zekere $l < a < r$ (of maar één van de twee intervallen). We zeggen dan dat f in een* omgeving *van a (of vlakbij a) gedefineerd is.*

Het reëele getal g heet de limiet *van $f(x)$ als x a benadert (we schrijven: $g = \lim_{x\to a} f(x)$), als geldt:*

> *Je kan de afstand tussen $f(x)$ en g voor alle $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ (die ook in de domein van f liggen) zo klein maken als je wilt (i.e. kleiner dan een willekeurig gekozen positief getal ϵ), door dat je δ maar klein genoeg kiest.*

Wat formeler kunnen we hetzelfde ook zo formuleren:

> *Voor alle positieve getallen ϵ bestaat er een positief getal δ (die van ϵ mag afhangen) zo dat voor alle $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ (die ook in de domein van f liggen) geldt:*
>
> $$|f(x) - g| < \epsilon.$$

De rechter limiet $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *is op dezelfde manier gedefineert, alleen bekijk je maar* $x \in (a, a+\delta)$, *dus* $x > a$.

Voor de linker limiet $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *bekijk je alleen* $x \in (a-\delta, a)$, *dus* $x < a$.

Waarschuwing!!! De *idea of the limit* van pag. 64 is niet goed geformuleerd. Je moet echt eizen dat $f(x)$ vlak bij g komt voor alle $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ en niet alleen maar voor een x.

Kan je een voorbeeld geven waar dit verschil belangrijk wordt?

Definitie 1.2 *Een in een omgeving van a en in het punt a gedefineerde functie f heet* continu *in a, als*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dus is f continu dan en slechts dan als de rechter limiet gelijk is aan de linker limiet en gelijk is aan $f(a)$.

Een in een omgeving van a, maar niet in het punt a, gedefineerde functie f heet in a continu uitbreidbaar *als de limiet $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat. In dat geval defineer je*

$$f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$$

en je krijgt een in a continue functie.

Dus is het berekenen van $\lim_{x \to a} f(x)$ hetzelfde als het zoeken van een waarde $f(a)$ waarmee je f naar a continu kan uitbreiden.

Rekenregels

- **Constanteregel:** $\lim_{x \to a} c = c$.
  Dus is de constante functie $f(x) = c$ continu in iedere punt a.

Stel dat f, g in een omgeving van a gedefineerde functies zijn en dat de limieten $\lim_{x \to a} f(x)$ en $\lim_{x \to a} g(x)$ bestaan. Dan hebben we de volgende regels.

- **Somregel:** $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
  Dus is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$ in a continu, als f en g het zijn.

- **Productregel:** $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x))$
  Dus is de functie $h(x) = f(x)g(x)$ in a continu, als f en g het zijn.

Stel ook nog dat $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

- **Quotiëntregel:** $\lim_{x \to a} (f(x)/g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x))/(\lim_{x \to a} g(x))$
  Dus is de functie $h(x) = f(x)/g(x)$ in a continu, als f en g het zijn en als $g(a) \neq 0$.

Stel dat de limieten $\lim_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim_{y \to b} g(y) = c$ bestaan en dat $c = g(b)$ is (dus dat g continu in b is).

- **Substitutieregel:** $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\big(\lim_{x \to a} f(x)\big) = \lim_{y \to b} g(y)$
  Dus is de functie $h(x) = g(f(x))$ continu in a als f continu in a en g continu in $b = f(a)$ is.

Stelling 1.3 (Basic trigonometric limit) *Er geldt:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Definitie 1.4 *Laat f een in een omgeving van a gedefineerde functie zijn en stel dat de limiet*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

bestaat. Dan heet de lijn

$$y = f(a) + m(x - a)$$

de raaklijn *van f in het punt a. We zullen later zeggen dat $m = f'(a)$ met f' de afgeleide van f.*

Wat informatie:

- De inschrijving voor Wiskunde 1A in Blackboard staat nu open. In Blackboard vind je algemene informatie en ook het verplichte huiswerk.

Doelen deze week:

- Continuïteit en limieten oefenen.
- Afmaken van hoofdstuk 2.

Huiswerk:

- Verplicht huiswerk (voor 30/09/2003): Opgave 10 van pag. 85 en opgave 52 van pag. 98.
- Vrijwillig huiswerk:
  - Oefen de knijpregel (squeeze law, insluitstelling) met opgave 26 uit paragraaf 2.3.
  - Uit paragraaf 2.4 opgaven 19,21,23,25,46,48.
  - Uit "miscellaneous problems" (pag. 100) opgaven 57,58,59,60,61,63,65.
  - Als nodig, vrijwillige opgaven van afgelopen week herhalen.
  - Probeer de bewijs van de "basic trigonometric limit" (pag. 82) met behulp van de knijpregel te begrijpen. (We hebben helaas niet genoeg tijd in het college om hem te doen.)

2 Limieten en continuïteit (vervolg)

We hebben vorige keer gezegd dat een functie $f : (l, r) \to \mathbb{R}$ continu in $a \in (l, r)$ is als geldt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dat is hetzelfde als te eisen

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Stel nu dat f in a niet gedefineerd is, maar wel in een omgeving van a. (Dus het domein van f bevat een interval $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ of maar één van de twee.) De functie f heet *continu naar a uitbreidbaar*, als de limiet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bestaat. Zij b zijn waarde. We definiëren dan $f(a) = b$ en krijgen een in a continue functie. In dit geval zeggen we ook dat f in a een *ophefbare discontinuïteit* heeft.

Als f continu is in iedere punt a van haar domein, dan heet f *continu*.

Uit de rekenregels van vorige keer krijgen we direct dat volgende functies continu zijn.

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (zo'n functie heet *polynoom*).

  Voorbeeld: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

- Rationale functies: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$

  Voorbeeld: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Opmerking 2.1 *Bekijk de functie $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en teken haar grafiek.*

Je ziet direct dat als je 1 van rechts benadert de functie waarden willekeurig groot kunnen worden. In dit geval schrijven we

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Let op, ∞ is geen reëel getal!

Als we 1 van links benaderen, dan wordt $f(x)$ willekeurig klein. We zeggen

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Het is duidelijk dat de rechter limiet niet gelijk is aan de linker limiet. Dus is $f(x)$ niet naar 1 continu uitbreidbaar, of anders gezegd, 1 is geen ophefbare discontinuïteit.

Stelling 2.2 (Knijpregel resp. insluitstelling resp. squeeze law)

- *Limietformulering:*

  Stel $k(x) \leq f(x) \leq g(x)$ voor alle x in een omgeving van a. Stel ook dat de volgende limieten bestaan en voldoen aan

  $$\lim_{x\to a} k(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

  Dan bestaat de limiet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ en zijn waarde is ook b.

- *Continuïteitsformulering:*

  Stel $k(x) \leq f(x) \leq g(x)$ voor alle x in een omgeving van a. Stel ook dat $k(x)$ en $g(x)$ continu in a zijn met $k(a) = g(a) = b$. Dan is f door $f(a) = b$ continu naar a uitbreidbaar.

Met behulp van de knijpregel kan men laten zien dat de functies $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$ continu zijn. Ook is de “basic trigonometric limit” een gevolg van deze regel (zie boek).

Als feit mogen we ook gebruiken dat de functie $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ voor iedere n continu is. Wat is het domein van f als n even is? En voor n oneven?

Ten slotte hebben we nog een heel nuttige stelling, die we gebruiken kunnen om te voorspellen dat bepaalde vergelijkingen een oplossing hebben. Helaas zegt deze stelling niet hoe we de oplossingen ook kunnen vinden.

Stelling 2.3 (Tussenwaardestelling) *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan neemt $f(x)$ iedere waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ tenminste voor een $x \in [a, b]$ aan.*

Als je bijvoorbeeld weet dat de continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ voldoet aan

$$f(a) < 0 \quad \text{en} \quad f(b) > 0,$$

dan zegt de tussenwaardestelling dat er een $x \in [a, b]$ bestaan moet met $f(x) = 0$. Voor een concrete toepassing zie opgave 63 van p. 100.

Doelen deze week:

- Afgeleide motiveren en invoeren
- Rekenregels voor de afgeleide oefenen
- In het boek 3.1 t/m 3.3

Huiswerk:

- Verplicht huiswerk (voor 7/10/2003): Opgave 18 van pag. 112 met de definitie van de afgeleide en opgave 10 van pag. 132 (de uitkomst hoeft niet vereenvoudigd te worden).
- Vrijwillig huiswerk:
  - Uit paragraaf 3.1 de opgaven 13, 15, 24, 30 t/m 36, 40, 48, 56.
  - Uit paragraaf 3.2 de opgaven 2, 4, 11, 12, 29, 31, 33, 56, 57, 77.
  - Uit paragraaf 3.3 de opgaven 2, 4, 13, 14, 33, 34.

3 De afgeleide - motivatie en rekenregels

	Plaats-tijd-functie	"algemene functie"
Gemiddelde ratio van verandering in $[t_0, t_0 + h]$	$\frac{\text{plaats}(t_0+h)-\text{plaats}(t_0)}{h}$ (bijv. $\frac{12km-2km}{10min} = 60\frac{km}{h}$) *gemiddelde snelheid*	$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *helling* van de verbindingslijn door $(t_0, f(t_0)), (t_0 + h, f(t_0 + h))$
Momentele ratio van verandering in het punt t_0	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\text{plaats}(t_0+h)-\text{plaats}(t_0)}{h}$ *de (momentele) snelheid* ten tijde t_0	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *helling* van de raaklijn in het punt $(t_0, f(t_0))$

Opmerkingen:

- De afgeleide van de plaats-tijd-functie is de snelheid-tijd-functie.
- De afgeleide van de snelheid-tijd-functie is de acceleratie-tijd-functie.
- De helling van de raaklijn in een punt is de afgeleide in dit punt.
- Als de functie boven (resp. onder) de raaklijn ligt, dan stijgt (resp. daalt) de afgeleide.

Definitie 3.1 *Zij $f : (l, r) \to \mathbb{R}$ een functie en $t_0 \in (l, r)$. Dan heet f* differentieerbaar in het punt t_0 *als de limiet*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

bestaat. Zijn waarde wordt (meestal) met $f'(t_0)$ genoteerd.

Er zijn ook nog andere notaties die jullie zullen tegenkomen. Zij x de variabele van de functie f (bijvoorbeeld: $f(x) = x^2 + 1$). Dan schrijven we ook

$$f'(t_0) = \frac{df}{dx}(t_0) = \frac{df}{dx} |_{x=t_0} = (D_x f)(t_0).$$

Vaak zie je ook $\frac{df}{dx}$ en $D_x f$ zonder het punt t_0 te specificeren. Dit zijn slechts notaties. Zij betekenen precies wat we net gedefinieerd hebben.

Rekenregels:

- **Constanteregel:** Als $f(x) = c$ met een constante c, dan

$$f'(x) = D_x c = \frac{dc}{dx} = 0.$$

(Bewijs. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$.)

- **Lineariteit:**

(a) Als $f(x) = cg(x)$ met een constante c en een in x differentieerbare functie g, dan

$$\begin{aligned} f'(x) &= cg'(x) && \text{resp.} \\ (D_x cg) &= c(D_x g) && \text{resp.} \\ \frac{dcg}{dx} &= c\frac{dg}{dx}. \end{aligned}$$

(Bewijs. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} = c \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = cg'(x)$ wegens de constanteregel voor limieten.)

(b) Als $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ met in x differentieerbare functies g_1 en g_2, dan

$$\begin{aligned} f'(x) &= g_1'(x) + g_2'(x) && \text{resp.} \\ D_x(g_1 + g_2) &= (D_x g_1) + (D_x g_2) && \text{resp.} \\ \frac{d(g_1 + g_2)}{dx} &= \frac{dg_1}{dx} + \frac{dg_2}{dx}. \end{aligned}$$

(Bewijs. Met de somregel voor limieten krijgen we
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(g_1(x+h) + g_2(x+h)) - (g_1(x) - g_2(x))}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g_1(x+h) - g_1(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{g_2(x+h) - g_2(x)}{h}$
$= g_1'(x) + g_2'(x)$.)

- **Machtsregel:** Zij $f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{Z}$ (dus ook negatief). Dan

$$f'(x) = D_x x^n = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

- **Productregel (Leibniz regel):** Zij $f(x) = g_1(x)g_2(x)$ voor in x differentieerbare functies g_1 en g_2, dan

$$\begin{aligned} f'(x) &= g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) && \text{resp.} \\ D_x g_1 g_2 &= (D_x g_1)g_2 + g_1(D_x g_2) && \text{resp.} \\ \frac{dg_1g_2}{dx} &= \frac{dg_1}{dx}g_2 + g_1\frac{dg_2}{dx} \end{aligned}$$

- **Quotiëntregel:** Zij $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ met in x differentieerbare functies g_1 en g_2 waar $g_2(x) \neq 0$, dan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{\big(g_2(x)\big)^2} && \text{resp.} \\ D_x \frac{g_1}{g_2} &= \frac{(D_x g_1)g_2 - g_1(D_x g_2)}{(g_2)^2} && \text{resp.} \\ \frac{d\frac{g_1}{g_2}}{dx} &= \frac{\frac{dg_1}{dx}g_2 - g_1\frac{dg_2}{dx}}{(g_2)^2} \end{aligned}$$

- **Kettingregel:** Zij $h(x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$ met g een in x differentieerbare functie en f een in $g(x)$ differentieerbare functie. Dan

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

  Voor de andere notaties noemen we de variabele van de functie f nu g. De variabele van g heet altijd nog x. (Bijvoorbeeld: $g(x) = x^2$ en $f(g) = \frac{1}{g}$. Dan $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$) In de andere notaties ziet de kettingregel er nu zo uit:

$$\begin{aligned} D_x f \circ g &= ((D_g f) \circ g)(D_x g) && \text{resp.} \\ \frac{df \circ g}{dx} &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \end{aligned}$$

<u>Doelen deze week:</u>

- Afgeleide van algebraïsche functies, sinus en cosinus
- Extrema
- In het boek 3.4 t/m 3.7

<u>Huiswerk:</u>

- Verplicht huiswerk (voor 14/10/2003): Opgave 88 van pag. 174 met de definitie van de afgeleide en opgave 96 van pag. 215 (met twee keer dezelfde Θ)
- Vrijwillig huiswerk:
  - Laat zien middels de definitie dat de afgeleide van $\cos(x)$ gelijk is aan $-\sin(x)$. Gebruik de regels om de afgeleiden te berekenen van $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ en $\frac{1}{\cos(x)}$.
  - Uit paragraaf 3.4 de opgaven 16, 24, 32, 46, 50.
  - Uit paragraaf 3.6 de opgaven 16, 34, 36, 41.
  - Uit paragraaf 3.7 de opgaven 4 (hoeft niet vereenvoudigd te worden), 8 (vind een uitdrukking zonder cosinus), 12 (vereenvoudigen!), 14, 22, 70, 87.

4 Meer over de afgeleide en extrema

Uit combinatie van de kettingregel en de machtsregel krijgen we de *gegeneraliseerde machtsregel*: Als $f(x) = \big(g(x)\big)^r$, dan geldt voor de afgeleide

$$f'(x) = rg'(x)\big(g(x)\big)^{r-1}$$

voor alle rationale exponenten r. In de andere notaties (weer zonder (x)) hebben we

$$D_x g^r = r(D_x g)g^{r-1} \quad \text{resp.} \quad \frac{dg^r}{dx} = r\Big(\frac{dg}{dx}\Big)g^{r-1}.$$

Voor de toepassingen is het belangrijk te weten dat

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \quad \text{en} \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}.$$

Stelling 4.1 *(a)* $D_x \sin(x) = \cos(x)$

(b) $D_x \cos(x) = -\sin(x)$

(c) $D_x \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Stelling 4.2 *Als de functie $f(x)$ in het punt a differentieerbaar is, dan is $f(x)$ in a ook continu.*

Zij f een in het punt c differentieerbare functie. Dan heeft f in c een *horizontale raaklijn* als $f'(c) = 0$ geldt.

Definitie 4.3 *Een functie $f(x)$ heeft in het punt c een* vertikale raaklijn *als de functie in een omgeving van c maar niet in c differentieerbaar is (dus bijvoorbeeld voor alle $x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$) en er geldt:*

$$\lim_{x \to c} |f'(x)| = \infty.$$

De tussenwaardestelling zegt dat een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (belangrijk dat de functie op een gesloten interval gedefineerd is) alle waarden tussen $f(a)$ en $f(b)$ aanneemt.

Daaruit kunnen we concluderen (met wat werk als we een bewijs willen) dat er punten g en k in $[a, b]$ zijn zo dat $f(g)$ de *maximale waarde* en $f(k)$ de *minimale waarde* van f op $[a, b]$ is. (We staan dus toe dat misschien g of k gelijk is aan een van de randpunten a of b.)

Definitie 4.4 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. De waarde $f(c)$ voor een $c \in [a, b]$ heet een* lokaal maximum *van f als voor alle x in een omgeving $(c - \delta, c + \delta)$ geldt:*

$$f(c) \geq f(x).$$

De waarde $f(c)$ voor een $c \in [a, b]$ heet een lokaal minimum *van f als voor alle x in een omgeving $(c - \delta, c + \delta)$ geldt:*

$$f(c) \leq f(x).$$

In beide gevallen mag δ zo klein zijn als nodig, als maar nog $\delta > 0$ geldt.

Lokale maxima en minima noemen we ook *lokale extrema*.

Stelling 4.5 *Zij f een in een omgeving van het punt c differentieerbare functie. Als f in c een lokaal minimum of maximum heeft, dan is de raaklijn aan het punt $(c, f(c))$ horizontaal. Dus $f'(c) = 0$.*

Andersom is de stelling niet juist. De functie $f(x) = x^3$ heeft in $x = 0$ een *zadelpunt* (dat betekent $f''(0) = 0$) en geen extremum, ofwel $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

We noemen een punt c een *kritiek punt* als of $f'(c) = 0$ of f in c niet differentieerbaar is.

Als f in c een lokaal maximum heeft dan geldt:

- Links van c stijgt de functie. Dus $f'(x) \geq 0$ voor $x \in (c - \delta, c)$.
- Rechts van c daalt de functie. Dus $f'(x) \leq 0$ voor $x \in (c, c + \delta)$.

Als f in c een lokaal minimum heeft dan geldt:

- Links van c daalt de functie. Dus $f'(x) \leq 0$ voor $x \in (c - \delta, c)$.
- Rechts van c stijgt de functie. Dus $f'(x) \geq 0$ voor $x \in (c, c + \delta)$.

Als f twee keer differentieerbaar is (dus als de afgeleide f' ook weer differentieerbaar is), betekent dit het volgende:

Stelling 4.6 *Zij f een in een omgeving van het punt c twee keer differentieerbare functie, die in c een horizontale raaklijn heeft (d.w.z. $f'(c) = 0$). Dan gelden:*

(a) f heeft in c een lokaal maximum als $f''(c) \leq 0$.

(b) f heeft in c een lokaal minimum als $f''(c) \geq 0$.

(c) f heeft in c een zadelpunt als $f''(c) = 0$.

Doelen deze week:

Impliciete differentiatie, Inverse functies differentieren, Machtsfuncties en de logaritme, in het boek 3.8 t/m 3.9.

Huiswerk:

Geen verplicht huiswerk. Vrijwillig huiswerk: Uit paragraaf 3.8 de opgaven 6, 10, 14, 18, 38, 40, 42, 44, 46, 64, 65, 66, 72. Uit paragraaf 3.9 de opgaven 16, 20, 24, 28, 31, 34, 42, 50, 58.

5 Impliciet differentiëren, inverse functies en de e-functie

Een functie $f(x)$ heet *impliciet gedefinieerd* als $f(x)$ als oplossing van een vergelijking gegeven is.

Bijvoorbeeld defineert de vergelijking $x^2 + y^2 = 100$ (in een omgeving van een punt $(x, f(x))$) een (continue en differentieerbare) functie $y = f(x)$. Vlakbij het punt $(6, 8)$ (merk op: $6^2 + 8^2 = 100$) hebben we de unieke differentieerbare *expliciete functie* $y(x) = \sqrt{100 - x^2}$. Maar als we naast het punt $(6, -8)$ kijken, hebben we $y(x) = -\sqrt{100 - x^2}$.

Vaak resulteren zulke impliciet gedefinieerde functies uit concrete problemen (verhaalopgaven). Maar het is soms moeilijk om de oplossingen expliciet te berekenen. Toch kunnen we vaak de afgeleide van een impliciet gedefinieerde functie in een gegeven punt berekenen, doordat we beide kanten van de definiërende vergelijking differentiëren.

Bijvoorbeeld kunnen we de vergelijking hierboven $x^2 + y^2 = 100$ naar x differentiëren, als we $y = y(x)$ als functie van x beschouwen:

$$\left(x^2 + (y(x))^2\right)' = 2x + 2y'(x)y(x) \quad \text{en} \quad 100' = 0.$$

Dus is $y'(x) = -x/y$. D.w.z. in het punt $(6, 8)$ is de afgeleide van y gelijk aan $-6/8 = -3/4$. In dit (makkelijke) geval kunnen we dit antwoord ook met de boven berekende expliciete functie $y(x) = \sqrt{100 - x^2}$ verifiëren: $y'(x) = -2x\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} = -\frac{x}{y}$.

Om te zien dat deze methode vaak ook werkt, als het echt te moeilijk is, eerst de functie op te lossen, bekijken we nu de vergelijking

$$\sin(x^2 + 2y) = x + \cos(x + y) - 1.$$

We willen weer $y = y(x)$ als functie van x beschouwen en de afgeleide in het punt $(0, 0)$ weten. Differentiëren van de linkerkant geeft

$$(2x + 2y'(x)) \cos(x^2 + 2y(x)).$$

Dit is gelijk aan de afgeleide van de rechterkant

$$1 - (1 + y'(x)) \sin(x + y).$$

Op dit moment (dus na het differentiëren) mogen we de waarden van x en y invullen. Dus krijgen we de vergelijking

$$2y'(0) \cos(0) = 1 - (1 + y'(0)) \sin(0)$$

en zo $y'(0) = 1/2$.

We zien dat we uit een vergelijking die een functie $y(x)$ (in een omgeving van een punt uniek) impliciet defineert een vergelijking krijgen, die $y'(x)$ impliciet defineert. Maar deze hangt van x en $y(x)$ af (en het is niet altijd makkelijk de bij een x behorende y te berekenen!).

Definitie 5.1 *Stel we hebben twee functies $f(x)$ en $g(x)$ zo dat het bereik van g (dus de mogelijke waarden $g(x)$) bevat is in het domein van f. Dan mogen we de functies samenstellen $h(x) = f(g(x))$, wat we ook met $f \circ g$ noteren.*

De functie g heet een rechterinverse *van f en f een* linkerinverse *van g als het samenstellen de identiteitsafbeelding geeft: $f(g(x)) = x$ voor alle x.*

Als f een rechter- en een linkerinverse van g is, dan heet f een inverse *van g (en andersom).*

Bijvoorbeeld bekijk de functies $f(x) = x - 1$ en $g(x) = x + 1$. Samenstellen geeft $f(g(x)) = g(x) - 1 = (x + 1) - 1 = x$. Dus is f een linkerinverse van g. Maar we hebben ook $g(f(x)) = f(x) + 1 = (x - 1) + 1 = x$, en f is dus ook een rechterinverse van g, en dus een inverse.

Merk op. Niet iedere functie heeft een inverse! Bijvoorbeeld heeft de functie $f(x) = x^2$ alleen maar de inverse $\sqrt{x}$, als we $x \geq 0$ eisen, omdat anders wegens $4 = f(2) = f(-2)$ een inverse niet gedefineerd kan worden.

Het is makkelijk de grafiek van een inverse functie te beschouwen. We hoeven alleen de functie aan de lijn $y = x$ te spiegelen. Dan is het ook duidelijk dat dat een continue functie $f(x)$ een inverse heeft, als zij strikt monotoon stijgend of strikt monotoon dalend is.

We herinneren ons aan de definitie van de afgeleide in een punt: De functie $f(x)$ is in a differentieerbaar als de raaklijn aan deze punt $(a, f(a))$ bestaat. (De raaklijn was de limiet van de verbindingslijnen (zie eerste college).) Nu is het duidelijk dat de inverse functie (als zij bestaat) ook differentieerbaar is, omdat de raaklijnen ook maar aan de lijn $y = x$ gespiegeld hoeven te worden.

Wat gebeurt er met de helling van een lijn als we ze aan $y = x$ spiegelen? Het wordt de inverse. Dus hebben we de volgende stelling.

Stelling 5.2 *Stel dat f en g inverse functies zijn. (Dus $f(g(x)) = x$.) Stel ook dat f in het punt a differentieerbaar is en dat $f(a) = b$. (Dus $g(b) = a$.)*

Dan is de functie g in het punt b differentieerbaar, en het geldt

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

We kunnen deze regel ook uit de kettingregel afleiden. We beginnen met $f(g(x)) = x$ en differentiëren beide kanten naar x. Dus krijgen we $g'(x)f'(g(x)) = 1$ en zo concluderen we $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

Passen we deze regel toe op het voorbeeld $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$ voor $x > 0$. We hebben $f'(x) = 2x$ en dus $f'(g(x)) = 2g(x)$. Invullen in de regel geeft

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dat was echt makkelijk, hoor.

Twee heel belangrijke voorbeelden van inverse functies zijn de machtsfunctie en de logaritme.

Stelling 5.3 *Stel $a > 0$. De functie $f(x) = a^x$ heeft de volgende eigenschappen:*

(i) $a^0 = 1, a^1 = a$

(ii) $a^x a^y = a^{x+y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

Merk op. We hebben tot nu toe alleen maar rationale exponenten toegestaan, namelijk door te defineren

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} \text{ en } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

voor positieve niet-nul natuurlijke getallen n en m. Maar we kunnen iedere reële getal x door rationale getallen benaderen. Dan kan men laten zien dat de limiet van de functiewaarden bestaat. Dit wordt dan de waarde a^x.

Op deze manier krijgen we een continue en ook differentieerbare functie. Dus bestaat de limiet

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x\big(\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}\big) = a^x m(a),$$

waar we $m(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$ schrijven. Dit hangt niet van x af, en is naar constructie de helling van de raaklijn aan a^x in het punt $(0, 1)$.

Het is duidelijk (kijk naar de grafiek) dat $m(a)$ nooit negatief en ook niet 0 kan worden als $a > 1$. Omdat a^x altijd positief is, is de afgeleide $(a^x)' = a^x m(a)$ nooit negatief of nul. Dus is a^x strikt monotoon stijgend en heeft een inverse functie. Deze heet de *logaritme met basis* a en wordt met $\log_a(x)$ genoteerd.

Uit de eigenschappen van a^x krijgen we direct.

Stelling 5.4 *Stel* $a > 1$. *De functie* $f(x) = \log_a(x)$ *heeft de volgende eigenschappen:*

(i) $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$

(ii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iii) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

We willen de helling $m(a)$ als boven als functie afhankelijk van a beschouwen. Men kan laten zien dat $m(a)$ continu is. Uit de grafiek van 2^x zien we dat $m(2) < 1$ is, en uit de grafiek van 3^x dat $m(3) > 1$. Dus bestaat er wegens de tussenwaardestelling toegepast op de continue functie m een reëel getal, dat wij e noemen, met de eigenschap $m(e) = 1$. Het is mogelijk e te benaderen en men vindt dat e ongeveer $2,71828$ is, maar dat is voor ons niet belangrijk. Wel belangrijk is dat wegens de berekening hierboven geldt, dat

$$(e^x)' = \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

dat dus e^x gelijk is aan haar afgeleide!

De inverse functie van e^x is per definitie $\log_e(x)$, maar daarvoor schrijven we ook $\ln(x)$. Deze functie heet de *natuurlijke logaritme*.

We passen nu de regel voor het differentiëren van inverse functies toe, om de afgeleide van $\ln(x)$ te berekenen:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Wat is de verband tussen a^x en de e-functie? We schrijven $a = e^{\ln(a)}$. Dus

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a)x}.$$

Met de kettingregel kunnen we nu ook a^x afleiden, en we krijgen $(a^x)' = \ln(a)a^x$. Dus is $m(a)$, die we eerder hadden, hetzelfde als de natuurlijke logaritme.

En de verband tussen $\log_a(x)$ en $\ln(x)$? We schrijven x als $a^{\log_a(x)}$ en dus middels de eigenschappen van de logaritme

$$\ln(x) = \ln(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \ln(a).$$

Het differentiëren van $\log_a(x)$ is een oefening...