Seminar zur Algebra: Unendliche Galois-Theorie

Sommersemester 2009, Mo 14-16 Uhr

Universität Duisburg-Essen
Institut für Experimentelle Mathematik

Prof. Dr. Gabor Wiese
Dipl.-Math. Ralf Butenuth

Vorträge

1. *Topologische Räume und metrische Räume, 20.04.09*

   ([J], 1.1-1.4) Dieser Vortrag soll die grundlegenden Begriffe der Topologie einführen, möglichst anschaulich mit Beispielen.

   Behandelt werden sollen: Definition eines topologischen Raums; abgeschlossene und offene Mengen; Dichtheit; metrische und metrisierbare Räume (Beispiele: diskrete Metrik, Metrik auf $\mathbb{R}^n$); Unterräume, Summen und Produkte; Basen und Subbasen; Verfeinerungen von Topologien (mit Beispielen, gröbste und feinste Topologie).

2. *Topologische Räume, 27.04.09*

   ([J], 1.5-1.7) Dieser Vortrag soll die drei wichtigen Begriffe der Stetigkeit, des Zusammenhangs und des Hausdorffraums behandeln:

   Definition von Stetigkeit, alle Bemerkungen aus [J], 1.5 und der folgende Satz: Jede stetige Abbildung ist bereits durch ihre Bilder auf einer dichten Teilmenge eindeutig bestimmt; Definition vom Zusammenhang und Wegzusammenhang, Beispiele für nicht-zusammenhängende und zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende topologische Räume, alle Bemerkungen aus [J], 1.6; Definition Hausdorffraum, Bemerkung: Metrische Räume sind hausdorffsch, Beispiel für nicht-hausdorffsche topologische Räume, alle Bemerkungen aus [J], 1.7.

3. *Kompaktheit und der Satz von Tychonoff, 04.05.09*

   Dieser Vortrag führt den wichtigen Begriff der Kompaktheit ein und soll den ersten wichtigen Satz des Seminars Beweisen: Das Produkt beliebiger kompakter Räume versehen mit der Produkttopologie ist wieder ein kompakter topologischer Raum.

   Behandelt werden sollen: [J], 1.8, Definition, Bemerkungen 1-3, Lemma, inklusive Erklärung des Satzes von Heine-Borel. Der folgende Satz: Kompakte Teilmengen diskreter topologischer Räume sind endlich. Zuletzt der Satz von Tychonoff mit vollständigem Beweis ([J], Kapitel 10, aber nur die für den Beweis relevanten Teile).

4. *Topologische Gruppen, 11.05.09*

   Topologische Gruppen sind Gruppen G zusammen mit einer Topologie auf G, so dass die Gruppenoperationen bezüglich dieser Topologie stetig sind. Dieser Vortrag soll in die Theorie der topologischen Gruppen einführen und einige für später wichtige Resultate beweisen.

   Folgendes soll behandelt werden: Definition einer topologischen Gruppe ([L], Kapitel 1.1); Beispiele: diskrete Gruppen, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ (kompakt), $O_n^+(\mathbb{R})$; [L], Satz 1.1.3 mit Folgerungen; [L], Satz 1.2.1 bis 1.2.10 mit allen Folgerungen; der folgende Satz: Seien G, G' topologische Gruppen und $\phi : G \to G'$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, dann ist $\mathrm{Kern}(\phi) \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe; und der folgende Satz: Sei G eine kompakte topologische Gruppe und $U \leq G$ eine offene Untergruppe. Dann hat U endlichen Index in G. (Dies ist ein Kompaktheitsargument.) Umgekehrt sei $V \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe endlichen Indexes, dann ist V offen. (Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen; V ergibt sich als Komplement von G und der Vereinigung aller Nebenklassen ungleich U.)

5. *Quotiententopologie, 18.05.09*

   Zu einer Untergruppe H einer topologischen Gruppe G kann man auf natürliche Art eine Topologie auf G/H definieren. Dieser Vortrag soll diesen topologischen Raum behandeln und wichtige Eigenschaften beweisen:

   Behandelt werden: [L], Satz 1.2.12 mit Folgerung und die Definition der Quotiententopologie; Satz 1.2.15 (Bemerkung: T_1-Raum ist nur ein anderes Wort für einen Hausdorff-Raum); mehrere Beispiele von Faktorgruppen topologischer Gruppen (aus [J], 3.4); und der Rest von [L], 1.2, insbesondere der Homomorphiesatz für topologische Gruppen (eventuell nicht jeden Beweis vorführen); plus der folgende Satz mit Beweis: Sei G eine topologische Gruppe und sei G' der Abschluss (= abgeschlossene Hülle in der Sprache von [J]) der Kommutatoruntergruppe von G in G. Dann ist $G^{\mathrm{ab}} = G/G'$ abelsch und jeder stetige Gruppen-Homomorphismus $G \to A$ in eine abelsche topologische Gruppe faktorisiert über G^{ab}.

6. *Unendliche Galois-Erweiterungen und die Krull-Topologie, 25.05.09*

   Dieser und der nächste Vortrag sind das erste Hauptziel des Seminars. Zunächst soll noch einmal an die Definition einer Galois-Erweiterung L/K erinnert werden ([B], Definition 4.1.1; Bemerkung 4.1.2 ist auch wichtig). Danach soll die Krull-Topologie wie in [B], 4.2, auf $\mathrm{Gal}(L/K)$ definiert werden (vergleiche auch [N], Kapitel IV) und es soll gezeigt werden, dass dadurch $\mathrm{Gal}(L/K)$ eine topologische Gruppe wird. Zuletzt sollen noch die folgenden drei Eigenschaften der Krull-Topologie gezeigt werden: $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist hausdorffsch, kompakt und total unzusammenhängend.

7. *Der Hauptsatz der unendlichen Galois-Theorie, 08.06.09*

   Das Ziel dieses Vortrages ist der Beweis des Hauptsatzes der unendlichen Galois-Theorie: Sei L/K eine (nicht notwendigerweise endliche) Galois-Erweiterung. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Zwischenkörpern von L/K und den abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/K)$. Die offenen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/K)$ entsprechen dabei gerade den endlichen Erweiterungen von K.

   Zunächst soll der Hauptsatz der endlichen Galois-Theorie wiederholt werden und alle benötigten Lemmata aus der endlichen Galois-Theorie zur Verfügung gestellt werden ([B], Kapitel 4.1); danach haben wir alle nötigen Resultate beisammen, um den Hauptsatz der unendlichen Galois-Theorie zu beweisen ([B], Satz 4.2.3 und Korollar 4.2.5, vergleiche auch [N], Kapitel IV, Satz 1.2). Anhand des Beispiels aus [R], Abschnitt 1.1 soll gezeigt werden, dass die Aussage des Hauptsatzes nicht gilt, wenn wir beliebige Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/K)$ betrachten.

8. *Proendliche Gruppen, 15.06.09*

   Die topologischen Gruppen, die man als Galois-Gruppen erhält, sind eine besondere Unterklasse der topologischen Gruppen, die sogenannten proendlichen Gruppen: Eine proendliche Gruppe ist eine kompakte, hausdorffsche und total unzusammenhängende topologische Gruppe.

   Zunächst sollen proendliche Gruppen wie in [R], Abschnitt 1.2, definiert werden und daran erinnert werden, dass Galois-Gruppen pro-endliche Gruppen sind. Weiterhin sollen die beiden folgenden Sätze gezeigt werden: (1) Eine topologische Gruppe G ist genau dann proendlich, wenn G kompakt und hausdorffsch ist und das Einselement von G eine Umgebungsbasis besitzt, die aus Normalteilern besteht. (2) Sei G eine pro-endliche Gruppe und H ein abgeschlossener Normalteiler. Dann ist G/H mit der Quotiententopologie wieder eine proendliche Gruppe.

9. *Projektive und injektive Limites, 22.06.09*

   Proendliche Gruppen kann man noch auf eine andere Weise charakterisieren: Als projektive Limites von projektiven Systemen. Dieser Vortrag behandelt diese Charakterisierung.

   Dieser Vortrag soll [N], Kapitel IV.2 behandeln. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist Satz 2.8. Von den Beispielen sollen Beispiel 1 und Beispiel 2 vorgestellt werden. Die Ringe $\mathbb{Z}_p$ der p-adischen ganzen Zahlen und ihre Quotientenkörper $\mathbb{Q}_p$ sollen ausführlich besprochen werden und die Rechengesetze darin explizit vorgestellt werden (zum Beispiel durch Ausrechnen der ersten Stellen der 3-adischen Entwicklung von $1/5$).

10. *Die Körpererweiterung $\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p$, 29.06.09*

    Als erstes Beispiel der vorangegangen Vorträge können wir die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p$ beschreiben. Erstes Ziel dieses Vortrags ist [B], Satz 9, Abschnitt 4.2. Danach soll der Ring $\hat{\mathbb{Z}}$ explizit beschrieben werden und [B], Satz 10 und Theorem 11, besprochen werden. Der Begriff der pro-zyklischen Gruppe soll auch erläutert werden.

11. *Die maximale zyklotomische Erweiterung von $\mathbb{Q}$, 06.07.09*

    In diesem Vortrag soll die Galoisgruppe der maximalen zyklotomischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ beschrieben werden. Diese Erweiterung erhält man durch Adjunktion sämtlicher primitiven n-ten Einheitswurzeln für alle $n \in \mathbb{N}$. Zunächst soll für $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive n-te Einheitswurzel die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ bestimmt werden (siehe [B], Abschnitt 4.5). Damit kann dann [N], Beispiel 6 ausführlich besprochen werden.

12. *Darstellungen proendlicher Gruppen, 13.07.09*

    Dieser Vortrag soll Begriffe der Darstellungstheorie proendlicher Gruppen einführen. Dazu soll [W], 1.1 komplett besprochen werden. Weiterhin soll der Kreisteilungs-Charakter (zyklotomischer Charakter) aus [W], 1.3 definiert werden und Proposition 1.3.1 bewiesen werden.

13. *Odds and Ends, 20.07.09*

    Eventuell haben wir noch Zeit, die Galoisgruppe der Erweiterung $\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$ zu beschreiben. Dies würde einige neue Begriffe benötigen, wie den der pro-auflösbaren Galois-Gruppe, der maximal unverzweigten Erweiterung und der maximal zahm verzweigten Erweiterung.

Literatur

[B] S. Bosch, *Algebra*, Springer-Verlag

[J] K. Jänich, *Topologie*, Springer-Verlag

[L] D. Lutz, *Topologische Gruppen*, B.I.-Wissenschaftsverlag

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag

[R] L. Ribes, *Introduction to Profinite Groups and Galois Cohomology*, Queen's papers in pure and applied mathematics - no. 24, 1970.

[W] G. Wiese, *Galois Representations*, Vorlesung im Sommersemester 2008 an der Universität Duisburg-Essen, `http://maths.pratum.net/notes/GalRep.pdf`