Université du Luxembourg

Mémoire de bachelor

L'arbre modulaire de Pythagore

Jerry Hilgert

sous la supervision de
Prof. Dr. GaborWiese

1er juin 2016

Table des matières

Mémoire de bachelor
L'arbre modulaire de Pythagore

Jerry Hilgert

Ce travail est basé sur l'article ≪The Modular Tree of Pythagoras≫ de Roger C. Alperin apparu au ≪MONTHLY 112≫ du novembre 2005.

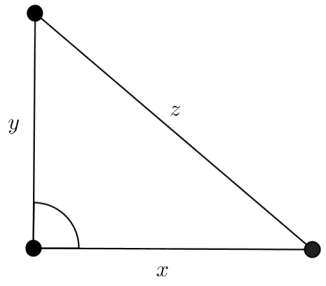
1 Introduction

Le théorème de Pythagore est nommé d'après le mathématicien et philosophe grec Pythagore de Samos (580 av. J.-C. -495 av. J.-C.), qui était probablement le premier à donner une preuve du théorème. Pourtant, les gens avaient déjà remarqué la relation spéciale entre les côtés d'un triangle rectangle avant Pythagore.

1.1 Le théorème de Pythagore

> Le carré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés de ce triangle :

$$z^2 = x^2 + y^2$$



Les entiers qui satisfont cette relation sont appelés des triplets pythagoriciens. Des anciens tableaux en argile datant du temps des Babyloniens, environ 1000 ans avant Pythagore, indiquent que les Babyloniens avaient déjà des règles pour générer des triplets pythagoriciens. [1]

1. Source : http ://ualr.edu/lasmoller/pythag.html

1.2 Définition : Être premier entre eux

Les triplets pythagoriciens sont premiers entre eux, s'ils n'admettent aucun diviseur commun (sauf 1).

Exemple : $3^2 + 4^2 = 5^2$
Dans ce travail, on s'interesse seulement aux triplets pythagoriciens qui sont premiers entre eux, appelés triplets primitifs.
Depuis Diophantus, on sait qu'il existe une relation entre les triplets pythagoriciens et la paramétrisation rationnelle du cercle unité :

$$t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

1.3 Proposition

Les triplets pythagoriciens qui sont premiers entre eux peuvent être écrits sous la forme $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ (quand y est pair), où m et n sont des entiers premiers entre eux de parité opposée.

Démonstration : En remplaçant t par $\frac{m}{n}$ dans les fractions au-dessus et en permutant, on trouve le résultat désiré. ■

1.4 Définition : $SL_2(\mathbb{Z})$ et $PSL_2(\mathbb{Z})$

Le groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{Z})$ est le groupe des matrices de dimension 2×2 avec déterminant 1, composées d'éléments de $\mathbb{Z}$.
Le groupe modulaire $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ est le quotient de $SL_2(\mathbb{Z})$ par son centre $\{Id, -Id\}$. [2]

La motivation d'analyser plus en détails les triplets pythagoriciens vient de la réalisation qu'on peut énumérer les nombres rationels sur la droite réelle en utilisant le groupe modulaire. [3] On peut maintenant transformer cette droite par une transformation de Möbius sur le cercle unité (plus de détails au chapitre 3). Cette application change les fractions en points rationels sur le cercle, et ce processus nous donne alors des triplets pythagoriciens.

On peut donc établir une correspondence entre le triplet pythagoricien

$$[m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2],$$

où m et n sont premier entre eux, avec une matrice appartenant au groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, où le contenu de la matrice dépend de m et n.

2. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_modulaire
3. Ce fait est admis ici. Pour plus de détails, veuillez consulter l'article ≪Rationals and the modular group≫, this MONTHLY 106 (1999)

1.5 Définition : Produit libre

Si G et H sont deux groupes, leur produit libre $G * H$ est défini comme le groupe (unique à isomorphisme près), dans lequel les groupes G et H s'injectent ($i : G \longmapsto G * H$ et $j : H \longmapsto G * H$) avec la propriété universelle suivante :
Pour tout groupe K, pour tous morohismes $g : G \longmapsto K$ et $h : H \longmapsto K$, il existe un unique morphisme $f : G * H \longmapsto K$ qui prolonge à la fois g et h, c'est-à-dire tel que $f \circ i = g$ et $f \circ j = h$. [4]

On va voir en section 3 que $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ est un produit libre de deux groupes cycliques, d'où il suit qu'il existe une structure sous forme d'un arbre des triplets pythagoriciens.
Trouver cette structure d'arbre, faire la liaison au groupe modulaire explicitement et construire cet arbre seront les buts principaux de ce travail.

Le résultat principal désiré de ce travail peut être résumé par le théorème suivant :

1.6 Théorème

L'ensemble des triplets pythagoriciens primitifs positifs a une structure d'un arbre ternaire, complet et infini.

1.7 Définition : Action par conjugaison

Une action par conjugaison est un cas particulier d'action de groupe. Un groupe G agit ici sur soi-même. $\forall g$ de G, [5]

$$aut_g : G \to G, x \mapsto aut_g(x) := gxg^{-1}$$

Pour prouver ce théorème, on va utiliser dans la section 2 l'action de Γ sur $M_2(\mathbb{Z})$, l'ensemble des matrices de dimensions 2×2 composées d'éléments de $\mathbb{Z}$, par conjugaison.

1.8 Défintion : Orbite

On définit l'orbite d'un élément x d'un ensmeble E par [6]

$$O_x = \{y \in E \mid \exists g \in G : y = g \cdot x\},$$

où G est un groupe. C'est donc l'ensemble des éléments de E associés à x sous l'action de G.

4. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_libre
5. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Action_par_conjugaison

Rappel : Sous-groupe normal

On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est normal dans G s'il est stable par conjugaison, c'est-à-dire si : [7]

$$\forall h \in H, \forall x \in G : xhx^{-1} \in H$$

En étudiant l'action de Γ par conjugaison, on va montrer au chapitre 3 que les triplets pythagoriciens peuvent être identifiés avec un orbite de $\Gamma(2)$, le sous-groupe normal de Γ qu'on obtient du noyau de la réduction modulo 2.

Puis, comme le groupe $\Gamma(2)$ est le produit libre des sous-groupes cycliques infinis engendrés par les images des matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ce qu'on va voir dans le chapitre 3), on peut utiliser la structure d'un arbre pour les éléments du groupe pour construire l'arbre des triplets pythagoriciens.

6. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Action_de_groupe_(mathématiques)
7. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Sous-groupe_normal

2 Action par conjugaison et similarité

Dans cette section, on va développer quelques propriétés fondamentales de l'action de Γ sur $M_2(\mathbb{Z})$. On commence par quelques définitions, suivies d'une observation élémentaire, mais importante.

2.1 Définition : Polynôme caractéristique

On considère une matrice carrée A d'ordre n. Le polynôme caractéristique $p_A(t)$ de A est le polynôme défini par

$$p_A(t) = \det(tI - A)$$

où I dénote la matrice identité d'ordre n. [8]

2.2 Définition : Trace d'une matrice carrée

Étant donnée une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, sa trace $tr(A)$ est définie par : [9]

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.3 Lemme

Pour une matrice M d'ordre 2, le polynôme caractéristique s'exprime comme suivant : [10]

$$t^2 - tr(M)t + det(M)$$

2.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Soit une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$. En remplaçant A dans son polynôme caractéristique $p_A(t)$, on reçoit la matrice nulle : [11]

$$p_A(A) = 0$$

8. Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Characteristic_polynomial
9. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Trace_(algèbre)
10. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_caractéristique
11. Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Cayley–Hamilton_theorem

2.5 Proposition

Une matrice carrée X d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ satisfait $X^2 = 0$ si et seulement si X est sous la forme suivante

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

où x,y et z satisfont $x^2 + yz = 0$.

Démonstration : Il est clair que si X est sous cette forme, alors X satisfait $X^2 = 0$. Supposons que X est une matrice carrée non nulle d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $X^2 = 0$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, X satisfait son polynôme caractéristique. Il suit que :

$$\begin{aligned} & X^2 - tr(X)X + det(X)I = 0 \\ \Rightarrow & - tr(X)X + det(X)I = 0 \\ \Rightarrow & det(X)I = tr(X)X \end{aligned}$$

Comme X n'est pas un multiple de la matrice indentité d'ordre 2 ou zéro, il suit que $tr(X) = det(X) = 0$. La conclusion suit. ■

Un élément T du groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ des matrices carrées inversibles d'ordre 2 avec coefficients dans $\mathbb{Z}$ agit par conjugaison sur l'ensemble $M_2(\mathbb{Z})$ par
$X \longmapsto TXT^{-1}$. Cette action préserve l'ensemble des matrices nilpotentes
$\mathcal{N}_2 = \{X \in M_2(\mathbb{Z}) : X^2 = 0\}$ décrit dans la proposition précédente.
On définit $[X]$ comme la classe des matrices semblables de X (ou classe de similitude de X) :

$$[X] = \{TXT^{-1} : T \in GL_2(\mathbb{Z})\}$$

On considère la matrice suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note que la matrice transposée E^t et $-E$ appartient à $[E]$, en conjugant, respectivement, par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers non négatives. Soit $\mathcal{E}_\lambda = [\lambda E]$ ($\lambda \in \mathbf{N}$), alors il est clair que $\mathcal{E}_\lambda = [\lambda E] = \{T(\lambda E)T^{-1} : T \in GL_2(\mathbb{Z})\} = \{\lambda TET^{-1} : T \in GL_2(\mathbb{Z})\} = \lambda\{TET^{-1} : T \in GL_2(\mathbb{Z})\} = \lambda[E]$.
De plus, $\mathcal{E}_\lambda$ et $\mathcal{E}_\mu$ sont disjoints si $\lambda \neq \mu$: Comme $\lambda \neq \mu$, on a $\lambda E \neq \mu E$, et alors $T\lambda ET^{-1} \neq T\mu ET^{-1}$ pout tout $T \in GL_2(\mathbb{Z})$, ce qui signifie que $\mathcal{E}_\lambda = [\lambda E] = \lambda[E] \neq \mu[E] = [\mu E] = \mathcal{E}_\mu$, et donc $\mathcal{E}_\lambda$ et $\mathcal{E}_\mu$ sont disjoints.

2.6 Proposition

Chaque matrice X de $\mathcal{N}_2$ est similaire à λE pour un unique λ dans $\mathbf{N}$. Alors $\mathcal{N}_2 = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{N}} \mathcal{E}_\lambda$ est l'union disjointe des classes de similitude.

Démonstration : On considère une matrice X de $\mathcal{N}_2$. Si un des coefficients de X est zéro, alors il suit immédiatement de la proposition 2.5 que X est la matrice nulle, un multiple de E, ou un multiple de E^t. Ici, X est la matrice nulle ou E.
Supposons maintenant que les coefficients de X sont tous des entiers non nuls. On peut écrire, par la proposition 2.5 :

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}.$$

Lemme

Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs-colonnes (respectivement les vecteurs-lignes) sont linéairement dépendants.

Comme le déterminant de X est zéro, les vecteurs-colonnes sont linéairement dépendants. De plus, après avoir mis en évidence le plus grand diviseur commun des coefficients de X, notant le μ, on peut trouver des entiers m et n premiers entre eux tels que $mx = nz$ et $my = -nx$: Soit $X' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & -x' \end{pmatrix}$ la matrice X après avoir mis en évidence μ. Comme le déterminant de X' est aussi zéro, il existe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, tel que $\frac{m}{n}x' = z'$ et $\frac{m}{n}y' = -x'$, ce qui nous donne les relations désirées.
Comme m et n sont premiers entre eux, on peut conclure que $m|z$,$m|x$, $n|x$ et $n|y$.
On a alors $x = mnx_1$, $y = ny_1$ et $z = mz_1$. Après avoir réduit tous les facteurs communs possibles, on voit que $mx_1 = z_1$ et $-nx_1 = y_1$. Alors $m|z_1$ et $n|y_1$, ce qui nous donne $x = mn\lambda$, $y = -n^2\lambda$ et $z = m^2\lambda$, où $\mu = \lambda = x_1$ est un nombre entier.
On peut alors réécrire la matrice X de la façon suivante :

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} mn & -n^2 \\ m^2 & -mn \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -n \end{pmatrix}$$

Par l'action de conjugaison, on a :

$$TXT^{-1} = \lambda T \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -n \end{pmatrix} T^{-1}$$

On peut alors trouver pour chaque entier m et n premiers entre eux des entiers u et v tel que $un + vm = 1$. Soit

$$T = \begin{pmatrix} u & v \\ -m & n \end{pmatrix}$$

Alors,

$$T\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} m & -n \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve alors $TXT^{-1} = \lambda E$ et la conclusion de la proposition suit. ■

3 Énumérer des triplets pythagoriciens

On a vu dans la preuve précédente que chaque matrice X dans $M_2(\mathbb{Z})$, qui est similaire à E, est dans $\mathcal{N}_2$ et de la forme

$$\begin{pmatrix} mn & -n^2 \\ m^2 & -mn \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} C & S-N \\ S+N & -C \end{pmatrix}$$

où m et n sont des entiers premiers entre eux, et les entiers $S = m^2 - n^2$, $C = 2mn$ et $N = n^2+m^2$ donnent un triplet pythagoricien satisfaisant $S^2+C^2 = N^2$. Ce triplet est primitif puisqu'on ne peut pas extraire un diviseur commun de S, C et N comme m et n sont premier entre eux. On a donc trouvé une méthode pour générer tous les triplets pythagoriciens.

Afin d'énoncer tous les triplets pythagoriciens, on cherche une méthode effective pour énumérer les éléments de l'orbite de E sous l'action de conjugaison de $GL_2(\mathbb{Z})$. L'énumération doit avoir une structure récursive, puisqu'on désire que les triplets présentent une structure arborescente. Donc on veut trouver une méthode qu'on peut toujours appliquer.

3.1 Définition : La classe à gauche

Soit H un sous-gorupe d'un groupe G et g un élément de G. La classe à gauche de g suivant H, noté gH, est définie par : [12]

$$gH = \{gh | h \in H\}.$$

3.2 Définition : Stabilisateur d'un élément

Le stabilisateur (ou sous-groupe d'isotropie) d'un élément x d'un ensemble E est l'ensemble

$$G_x = \{g \in G | gx = x\}$$

des éléments d'un groupe G agissant sur E qui laissent x invariant sous leur action. [13]

3.3 Proposition

Si un groupe G agit par permutations sur un ensemble X et si x_0 est un élément de X, alors il existe une bijection $gH \longmapsto g \cdot x_0$ entre les classes à gauche des $g \in G$ suivant le stabilisateur H de x_0 ($\{g \in G : gx_0 = x_0\}$)et l'orbite de x_0.

12. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Classe_suivant_un_sous-groupe
13. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Action_de_groupe_(mathématiques)#Stabilisateur_d.27un_.C3.A9l.C3.A9ment

Dans notre cas, l'action par permutations est la conjugaison des matrices TXT^{-1} avec $T \in GL_2(\mathbb{Z})$ et $X \in M_2(\mathbb{Z})$. Cette propriété fondamentale des actions de groupes garantit qu'il existe une bijection entre les éléments de l'orbite de E et les classes du stabilisateur de E.

3.4 Définition : Rang d'un groupe

Le rang d'un groupe G est le plus petit cardinal d'une partie génératrice de G :[14]

$$\text{rang}(G) = \min\{|X||\langle X\rangle = G\}$$

On va maintenant montrer que le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ peut être remplacé par un groupe similaire, pour être plus précis, par un groupe libre de rang 2, sans changer l'ensemble des triplets primitifs positifs obtenus de l'orbite.

Premièrement, comme la conjugaison par une matrice diagonale de déterminant -1 change seulement le signe de E, on peut restreindre notre attention au sous-groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ d'éléments ayant comme déterminant 1, sans privation de triplets. Dans cette situation, le stabilisateur de E est le sous-groupe $H = \{T \in SL_2(\mathbb{Z}) : TET^{-1} = E\}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$, qui est engendré par

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $-I$, le négatif de la matrice identité d'ordre 2 :
Prenons $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors on trouve que

$$TET^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ac}{ad-bc} & -\frac{a^2}{ad-bc} \\ \frac{c^2}{ad-bc} & -\frac{ac}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Pour que $TET^{-1} = E$, il faut $c = 0$, $a = d$ et $b \neq 0$ (pour qu'on n'a pas de produit $0 \cdot 0$). Ainsi tous les coefficients de TET^{-1} sont 0 sauf le coefficient en haut à droite qui est alors -1. La matrice T la plus simple qui satisfait cela est U. U est un générateur du stabilisateur de E, mais pas le seul, comme a et d peuvent aussi être tous les deux négatifs. Pour cela, il nous faut aussi $-I$.

Comme l'effet de la conjugaison par $-I$ sur les triplets S, C et N est trivial, on peut mettre cette action à l'écart et travailler avec $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ au lieu de $SL_2(\mathbb{Z})$.
On va maintenant démontrer la proposition suivante :

14. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Rang_d%27un_groupe

3.5 Propostion

Le groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe engendré par les images des matrices U et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

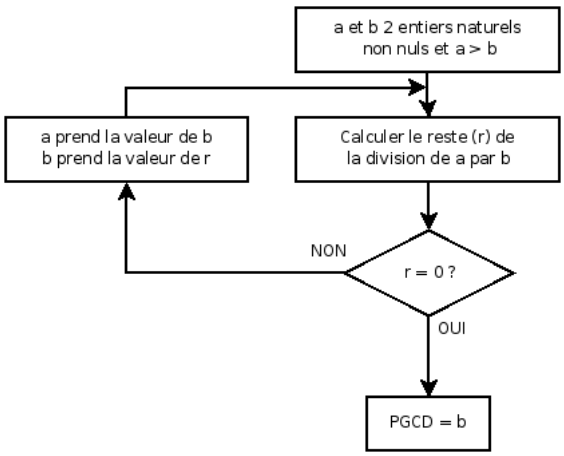
Démonstration : Comme $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$, il suffit de montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par U et A. Soit $G = \langle U, A\rangle$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par U et A. On veut montrer que $G = SL_2(\mathbb{Z})$.
Premièrement, on note l'effet de A et de U^n sur une matrice quelconque en multipliant par la gauche :

$$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad U^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

On va maintenant utiliser l'algorithme d'Euclide.

Lemme

L'algorithme d'Euclide est un algorithme permettant de déterminer le plus grand commun diviseur (PGCD) de deux entiers sans connaître leur factorisation. Voici la procedure de cet algorithme : [15]



On prend $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Supposant que $c \neq 0$. Si $|a| \geq |c|$, alors on écrit $a = cq + r$ avec $0 \leq r < |c|$. Alors le coefficient en haut à gauche de $U^{-q}\gamma$ est $a - qc$, ce qui est plus petit que la valeur absolue du coefficient en bas à gauche c. Appliquant A échange les coefficients (par un changement de signe), et on applique l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{Z}$ encore une fois si le coefficient en

15. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_d%27Euclide

bas à gauche n'est pas zéro. La multiplication de γ par la gauche avec assez de copies de A et assez de puissances de U nous donne finalement une matrice dans $SL_2(\mathbb{Z})$ avec un coefficient 0 en bas à gauche.
Une telle matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \pm 1 & m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = U^m$ ou $-U^{-m}$, où $m \in \mathbb{Z}$, parce qu'elle doit avoir un déterminant qui est égale à 1. Alors $g\gamma = \pm U^n$ pour $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$ quelconques.
Comme $U^n \in G$ et $-I_2 = A^2 \in G$, on a $\gamma = \pm g^{-1}U^m \in G$, ce qui démontre que $G = SL_2(\mathbb{Z})$. [16]
Donc, U et A engendre $SL_2(\mathbb{Z})$ et leurs images engendrent alors $PSL_2(\mathbb{Z})$. ■

Définition : Groupe cyclique d'ordre n

Un groupe cyclique est un groupe qui est engdré par un seul élément x, le générateur du groupe.
Un groupe cyclique d'ordre fini n est noté $\mathbb{C}_n$ ou $\mathbb{Z}_n$ et son générateur satisfait la relation $x^n = I$, où I est l'élément neutre. [17]

3.6 Proposition

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

Démonstration : On veut démontrer que le groupe modulaire $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ est un produit libre du groupe cyclique d'ordre 2 et du groupe cyclique d'ordre 3.

Normallement, on démontre ceci en trouvant le domaine fondamental pour l'action sur le demi-plan de Poincaré. Mais ici, on utilise seulement l'action sur les nombres irrationels et on donne la preuve en utilisant la caractérisation du produit libre par des ensembles de mots alternant :
G est le produit libre de ses sous-groupes A et B, noté $G = A*B$, si et seulement si G est engendré par ces sous-groupes et si $w = a_1b_1a_2b_2\cdots a_nb_n$ pour $a_i \in A, b_j \in B, 1 \leq i, j \leq n$ et a_i, b_j sont différents de l'élément identité sauf peut-être pour $i = 1$ ou $j = n$, alors w n'est pas l'élément neutre de G.
γ est le groupe quotient $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$. On a déjà montré avec la proposition 3.5 que les matrices

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$ et que leurs images engendrent Γ. Soit

$$\beta = \mu\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et notant similairement leurs images dans Γ. Il est clair que Γ est engendré par $A = \langle\alpha\rangle$ et $B = \langle\beta\rangle$. Le sous-groupe A est cyclique d'ordre 2 et le sous-groupe B est cyclique d'ordre 3.

16. basé sur http ://www.math.uconn.edu/∼kconrad/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf
17. Source : http ://mathworld.wolfram.com/CyclicGroup.html

Définition : Sphère de Rieman

La sphère de Riemann est le nom donné au plan des nombres complexes avec un point additionnel à l'infini : $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où ∞ est l'infini complexe. [18]

Le groupe Γ agit par des transformations de Möbius sur la sphère de Riemann, et donc aussi sur l'ensemble $\mathcal{J}$ des nombres irrationels réels. Explicitement, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $SL_2(\mathbb{Z})$, alors l'action sur les nombres irrationnels est donnée par :

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

L'action des générateurs est donnée par

$$\alpha : z \longmapsto \frac{-1}{z}$$

$$\beta : z \longmapsto 1 - \frac{1}{z}$$

et

$$\beta^{-1} : z \longmapsto \frac{1}{1-z}$$

Pour trouver maintenant que $PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, on doit prouver la caractérisation du produit libre par des ensembles de mots alternants. Pour cela, on note quelques propriétés de l'action. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres irrationnels positifs et soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres irrationnels négatifs. Il est claire que

$$\alpha(\mathcal{P}) \subset \mathcal{N}$$

et

$$\beta^{\pm 1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{P}.$$

On est maintenant prêt à prouver la propriété des mots alternants. Soit w un mot qui est alternant entre A et B. Si ce mot comporte un nombre impair de α et $\beta^{\pm 1}$, alors $w(\mathcal{P}) \subset \mathcal{N}$ ou $w(\mathcal{N}) \subset \mathcal{P}$ dépendant si la lettre à l'extrémité droite est α ou non. Si le mot comporte un nombre pair de α et $\beta^{\pm 1}$, alors on peut conjuger par α, si nécessaire, pour recevoir un nouveau mot w qui commence par un $\beta^{\pm 1}$ et termine avec un α. Maintenant, si $w = \beta \cdots \alpha$, alors $w(\mathcal{P}) \subset \beta(\mathcal{N})$ est un sous-ensemble de nombres irrationnels plus grand que 1. De la même façon, si $w = \beta^{-1} \cdots \alpha$, alors $w(\mathcal{P}) \subset \beta^{-1}(\mathcal{N})$ est un sous-ensemble de nombres irrationnels positifs plus petits que 1. En tout cas, on a $w(z) \neq z$ pour un nombre irrationnel z quelconque, et donc ce n'est pas l'élément identité. Comme cela est le conjugué du mot donné, on a aussi verifié que celui-ci n'est pas non plus l'élément identité. [19] ■

18. Source : http ://mathworld.wolfram.com/ExtendedComplexPlane.html

19. basé sur l'article $PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ écrit par R. C. Alperin et publié dans this MONTHLY 100 (1993) p. 385-6

Pour énumérer des triplets pythagoriciens primitifs $[S, C, N]$, il faut commencer avec un m et n qui sont premiers entre eux et de parité opposée :
a) Supposons d'abord que m et n ne sont pas premiers entre eux. Alors on peut écrire $m = a \cdot q$ et $n = a \cdot p$, où a est un diviseur commun de m et n et $p, q \in \mathbb{Z}$. On trouve alors que $S = m^2 - n^2 = a^2q^2 - a^2p^2 = a^2(q^2 - p^2)$, $C = 2a^2qp$ et $N = a^2p^2 + a^2q^2 = a^2(p^2 + q^2)$. Cela montre que $[S, C, N]$ n'est pas primitif, car on a trouvé a^2 comme diviseur commun. Il faut donc que m et n soient premiers entre eux.
b) Si m et n sont pairs, alors ils ont 2 comme diviseur commun, et cela contredit le fait que m et n doivent être premiers entre eux.
Si m et n sont impairs, alors on peut écrire $m = 2q+1$ et $n = 2p+1$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On trouve alors que $S = m^2-n^2 = (2q+1)^2-(2p+1)^2 = \cdots = 4(q-p)(q+p+1)$, $C = 2(2p + 1)(2q + 1)$ et $N = m^2 + n^2 = (2q + 1)^2 + (2p + 1)^2 = \cdots = 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 1)$. Le triplet pythagoricien $[S, C, N]$ n'est donc pas primitif !
Si m et n sont de parité opposée, alors il est clair que m et n sont premiers entre eux, et en remplaçant m et n dans les formules de S, C et N, on ne va pas trouver de diviseur commun, ce qui signifie que $[S, C, N]$ est primitif.

Si m est pair et n est impair, alors C est pair et S est impair. Pour un tel m et n, il existe une matrice $T \in PSL_2(\mathbb{Z})$ avec $T_{11} = n$ et $T_{21} = m$. Si T_{12} est impair, alors on remplace T par la matrice $T' = TU$, qui est alors pair en T'_{12}. T' nous donne alors le même triplet pythagoricien que T, puisque U stabilise E. Les éléments de $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ avec les coefficients pairs situés en dehors de la diagonale de la matrice forment le sous-groupe normal $\Gamma(2)$, le noyau de l'homeomorphisme $PSL_2(\mathbb{Z}) \longmapsto PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ induit par une reduction modulo 2.
En déduisant des remarques précédentes, on n'a pas besoin de considérer l'action du groupe modulaire entier Γ pour énumérer tous les triplets, mais seulement celle de $\Gamma(2)$.
Comme U et A engendrent Γ, on peut montrer que $\Gamma(2)$ est engendré par les matrices

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, ces éléments engendrent le groupe comme produit libre.

3.7 Proposition

> Le groupe $\Gamma(2)$ est le produit libre des sous-groupe cycliques infinis engendrés par U^2 et L^2.

Démonstration : Ce résultat découle de la structure de $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui est un produit libre des sous-groupes d'ordre 2 et 3 engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \alpha\mu = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qu'on a montré avec la proposition 3.6.
Montrons d'abord que $\Gamma(2) = \langle U^2, L^2 \rangle$:
Les matrices U^2 et L^2 sont dans $\Gamma(2)$, donc $\langle U^2, L^2 \rangle \subset \Gamma(2)$.
Pour l'autre inclusion, on va adapter la preuve de $\langle U, A \rangle = SL_2(\mathbb{Z})$ en utilisant le théorème suivant : si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, alors $a = bq + r$, où $|r| \leq \frac{1}{2}|b|$ (il est possible que $r < 0$). On choisit une matrice quelconque $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$, tel que a et d sont impairs, et b et c sont pairs. Si C a comme coefficient en bas à gauche 0, alors $C = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Comme $C \in \Gamma(2)$, m doit être pair. Notant $m = 2k$, alors $C = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U^{2k} \in \langle U^2 \rangle$.
Supposons que le coefficient en bas à gauche de C n'est pas 0. On va maintenant montrer comment multiplier C avec des matrices U^2 et L^2 à gauche pour réduire la valeur de $max(|a|, |c|)$. Comme a et c sont de parité opposée, on a que $|a| \neq |c|$, et alors $max(|a|, |c|)$ est soit $|a|$, soit $|c|$, mais pas les deux.
Si $|a| > |c|$ et $c \neq 0$, on note $a = (2c)q + r$, où $|r| \leq \frac{1}{2}|2c| = c$. Alors $U^{-2q}C = \begin{pmatrix} 1 & -2q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b - 2qd \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $max(|r|, |c|) = |c| < |a| = max(|a|, |c|)$.
Si $|a| < |c|$, alors (comme $a \neq 0$, car a est impair) on note $c = (2a)q + r$, où $|r| \leq \frac{1}{2}|2a| = |a|$. Maintenant, $L^{-2q}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ r & d - 2qb \end{pmatrix}$, avec $max(|a|, |r|) = |a| < |c| = max(|a|, |c|)$.
En appliquant ces deux démarches à tour de rôle, on va arriver à une matrice gC avec $g \in \langle U^2, L^2 \rangle$, où le coefficient en bas à gauche est 0. Donc, par l'argumentation plus en haut, on a $gC \in \langle U^2 \rangle$. Finalement, $C = g^{-1} \cdot gC \in \langle U^2, L^2 \rangle$, ce qui démontre que $\Gamma(2) = \langle U^2, L^2 \rangle$. [20]

Comme $U = AB, U^2 = ABAB, L = AB^{-1}$, et $L^2 = AB^{-1}AB^{-1}$, chaque mot alternant entre $U^{\pm 2}$ et $L^{\pm 2}$ est aussi alternant entre A et $B^{\pm 1}$, donc non trivial. ■

L'énumération des triplets est encore subtile, comme on veut énumérer seulement les différentes valeurs absolues des triplets $[|S|, |C|, |N|]$.
Soit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour une matrice $T \in PSL_2(\mathbb{Z})$ quelconque, $\delta(T) = DTD^{-1}$ est la matrice avec les mêmes coefficients non diagonals que T, mais avec les signes changés sur la diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \delta(T) = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}.$$

20. Source : http ://www.math.uconn.edu/∼kconrad/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf

Les deux matrices T et $\delta(T)$ donnent le même triplet pythagoricien absolu, ce qu'on peut immédiatement déduire en consultant $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} C & S-N \\ S+N & -C \end{pmatrix}$, vu au début de la section 3. Comme l'automorphisme δ d'ordre 2 à l'effet que $\delta(U^2) = U^{-2}$ et $\delta(L^2) = L^{-2}$,on peut éviter d'utiliser T et $\delta(T)$ dans l'énumération des classes de $\Gamma(2)$ modulo le stabilisateur de E simplement en n'énumérant que la «moitié»des classes.
Résumant : on a décrit la liste des triplets pythagoriciens basée sur l'énumération des classes de $\Gamma(2)$ modulo le stabilisateur de E, le sous-groupe engendré par U^2. Comme $\Gamma(2)$ est un produit libre, les représentants des classes ne sont que des mots écrits avec $L^{\pm 2}$ et $U^{\pm 2}$. Parce qu'on considère que des classes à gauche non-triviales du sous-groupe engendré par U^2, la lettre la plus à droite d'un représentant de classe est $L^{\pm 2}$. On fait un algorithme de parcours en largeur [21], raccordant alternif un $U^{\pm 2}$ ou $L^{\pm 2}$ sur la gauche de notre file de lettres. Par exemple, si le dernier élément de groupe sur la gauche est L^2, alors on peut raccorder un L^2, U^2, ou U^{-2}. (Un L^{-2} annulerait le L^2 précédant et on aurait fait un pas en arrière dans notre énumération.)
On peut alors décrire les différents représentants des classes, qui nous donnent les triplets pythagoriciens distincts, en faisant référence à la propriété d'alternance des lettres dans les mots du groupe libre $\Gamma(2)$ écrit avec les générateurs U^2 et L^2. Comme on peut extraire $|n|$ et $|m|$ de $|C|$ et $|N|$, alors en utilisant δ, on voit qu'on peut obtenir des différents triplets si on commence avec seulement une des files $L^{\pm 2}$ au début.

Soit $\mathcal{L}_0^+ = \{L^2\}, \mathcal{L}_0^- = \mathcal{U}_0^{\pm} = \varnothing$ et définissant de manière inductive

$$\mathcal{L}_{k+1}^+ = \{L^2 X : X \in \mathcal{L}_k^+ \cup \mathcal{U}_k^{\pm}\},$$

$$\mathcal{L}_{k+1}^- = \{L^{-2} X : X \in \mathcal{L}_k^- \cup \mathcal{U}_k^{\pm}\},$$

$$\mathcal{U}_{k+1}^+ = \{U^2 X : X \in \mathcal{U}_k^+ \cup \mathcal{L}_k^{\pm}\},$$

$$\mathcal{U}_{k+1}^- = \{U^{-2} X : X \in \mathcal{U}_k^- \cup \mathcal{L}_k^{\pm}\},$$

où $\mathcal{L}_k^{\pm} = \mathcal{L}_k^+ \cup \mathcal{L}_k^-$ et $\mathcal{U}_k^{\pm} = \mathcal{U}_k^+ \cup \mathcal{U}_k^-$, pour $k = 0, 1, ...$ Par exemple, si $k = 0$, l'ensemble du niveau 1 est alors

$$\mathcal{L}_1^+ = \{L^4\}, \quad \mathcal{L}_1^- = \varnothing, \quad \mathcal{U}_1^+ = \{U^2 L^2\}, \quad \mathcal{U}_1^- = \{U^{-2} L^2\}.$$

Cette méthode va nous donner une énumération effective des triplets pythagoriciens primitifs non-triviaux en termes de représentants de classes dans l'union disjoint

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k \geq 0} (\mathcal{L}_k^{\pm} \cup \mathcal{U}_k^{\pm}).$$

La relation de récurrence qui compte le nombre p_k d'éléments dans $\mathcal{P}$ au niveau k est $p_k = 3p_{k-1}$, comme on peut toujours attacher quelconque de trois éléments à la gauche d'une file alternante ainsi qu'elle reste alternante. Soit $\prod$ l'ensemble des matrices obtenu de E par la conjugaison avec les éléments de

21. Source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_parcours_en_largeur

$\mathcal{P}$. Les coefficients de chaque $T = (T_{ij})$ dans $\prod$ déterminent un unique triplet pythagoricien primitif composé d'entiers positifs de manière suivante :

$$|S| = |T_{21} + T_{12}|, \quad |C| = |2T_{11}|, \quad |N| = |T_{21} - T_{12}|.$$

Le théorème suivant est la conclusion de toutes les discussions précédentes :

3.8 Théorème

Il existe une bijection entre les triplets pythagoriciens primitifs et l'ensemble $\prod$ de représentants de classes du sous-groupe engendré par U^2 dans $\Gamma(2)$. Cet ensemble peut être écrit comme union de sous-ensemble $\prod_k$ de grandeur $3^k (k = 0, 1, 2, ...)$, les niveaux de l'arbre de Pythagore.

On construit l'arbre de Pythagore en commençant par

$$L^2 E L^{-2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

donc $m = 2, n = 1$, et $[S, C, N] = [3, 4, 5]$. Au prochain niveau, $L^4 E L^{-4}$ nous donne le triplet $[15, 8, 17]$, et en conjugant E par $U^2 L^2$, respectivement par $U^{-2} L^2$, nous donne le triplet $[21, 20, 29]$, respectivement le triplet $[5, 12, 13]$ (après avoir pris la valeur absolue), au-dessus de $[3, 4, 5]$. La conjugaison de la matrice correspondant au triplet $[S, C, N]$ au niveau k, où $S = m^2 - n^2, C = 2mn$, et $N = m^2 + n^2$, en utilisant L^{-2}, L^2, U^{-2} et U^2, crée 3 nouveau triplets au niveau $k + 1$ et double un triplet du niveau précédent $k - 1$. En général, la construction de l'arbre se fait en connectant le $j$ième élément du niveau k avec les valeurs absolues des trois différents triplets au niveau $k + 1$ (numéroté $3(j - 1) + 1, 3(j - 1) + 2, 3(j - 1) + 3$) obtenus de l'action de conjugaison du $j$ième élément.
Soit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_- &= [m^2 - 4mn + 3n^2, 2mn - 4n^2, m^2 - 4mn + 5n^2], \\
\mathbf{L}_+ &= [m^2 + 4mn + 3n^2, 2mn + 4n^2, m^2 + 4mn + 5n^2], \\
\mathbf{U}_- &= [-n^2 + 4mn - 3m^2, 2mn - 4m^2, n^2 - 4mn + 5m^2], \\
\mathbf{U}_+ &= [-n^2 - 4mn - 3m^2, 2mn + 4m^2, n^2 + 4mn + 5m^2].
\end{aligned}$$

Alternativement, pour obtenir le prochain niveau dans l'arbre si les coordonnées d'un triplet (écrit en termes de m et n) sont toutes positives, il suffit de calculer $\mathbf{L}_+, \mathbf{U}_-$, et $\mathbf{U}_+$, parce que si S, C, et N sont positifs, alors le triplet précédent est $\mathbf{L}_-$.
Cela est facile à voir : dans ce cas $m > n \geq 0, 2mn > 2mn - 4n^2 > -2mn$, et la valeur absolue de $2mn - 4n^2$ (la deuxième coordonnée de $\mathbf{L}_-$) est plus petite que $C = 2mn$. De même, la deuxième coordonnée de $\mathbf{L}_+, \mathbf{U}_-$, et de $\mathbf{U}_+$ sont plus grands que C.
On montre maintenant comment il faut modifier $\mathbf{L}_+, \mathbf{U}_-$ et $\mathbf{U}_+$ pour obtenir des applications qui associent des triplets avec des coordonnées positives à d'autres triplets du même type et qui préservent ainsi le quadrant positif du cone $S^2 +$

$C^2 = N^2$. On peut utiliser les applications suivantes comme point de départ pour une description alternatif de la structure de l'arbre :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+[S,C,N] &= [m^2+4mn+3n^2, 2mn+4n^2, m^2+4mn+5n^2] \\
&= [S,-C,N] + 2(N-S+C)[1,1,1], \\
\mathcal{U}_-[S,C,N] &= [n^2-4mn+3m^2, 4m^2-2mn, n^2-4mn+5m^2] \\
&= [-S,C,N] + 2(N+S-C)[1,1,1], \\
\mathcal{U}_+[S,C,N] &= [n^2+4mn+3m^2, 4m^2+2mn, n^2+4mn+5m^2] \\
&= [-S,-C,N] + 2(N+S+C)[1,1,1].
\end{aligned}$$

Certains chemins de l'arbre ont des propriétés predictibles. Par exemple, si on commence à la racine et on suit toujours le chemin reçu par $\mathcal{L}_+$, alors on observe que la coordonnée C grandit quadratiquement, comme les termes sont solutions de $x^2+y^2=(x+2)^2$(ou de manière équivalente : $x=\frac{1}{4}y^2-1$) :

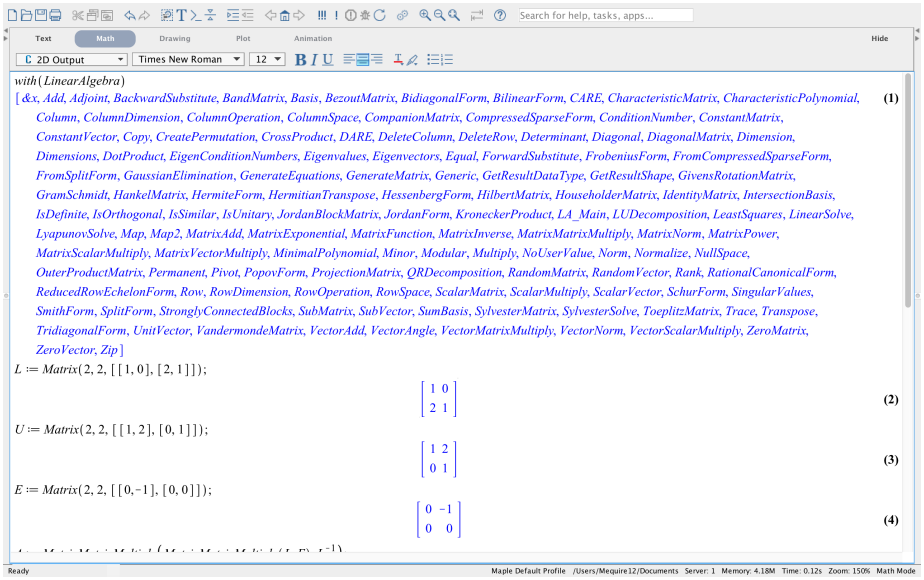
$$\begin{gathered}
[3,4,5] \\
[15,8,17] \\
[35,12,37] \\
[63,16.63] \\
[99,20,101] \\
[143,24,145] \\
[195,28,197] \\
\dots
\end{gathered}$$

Un autre chemin commence à la racine $[3,4,5]$ et suit la route pendant laquelle la coordonnée N diffère de 1 du double de la coordonnée S ou de la coordonnée C. Cette route est générée par l'alternance entre l'application des transformations $\mathcal{L}_+$ et $\mathcal{U}_-$:

$$\begin{gathered}
[3,4,5] \\
[15,8,17] \\
[33,56,65] \\
[209,120,241] \\
[451,780,901] \\
[2911,1680,3361] \\
\dots
\end{gathered}$$

4 Calculs des noeuds de l'arbre à l'aide de Maple

Après avoir vu la théorie, nous allons maintenant passer à la partie pratique. Ici, on va voir comment construire l'arbre modulaire de Pythagore à l'aide du logiciel *Maple*.
Tout d'abord, on se met dans l'environnement de travail *LinearAlgebra*. Puis on introduit les matrices L^2, U^2 et E, dénotées comme L, U et E, respectivement.



Maintenant, on calcule la matrice du premier noeud L^2EL^{-2}, dénoté ici par A. Puis on calcule le triplet pythagoricien du premier noeud à partir de la matrice A. On définit une fonction f qui nous donne les matrices des prochains trois noeuds à l'aide de la matrice A :

$$\begin{aligned} f := M \longmapsto & \text{ MatrixMatrixMultiply } (\text{MatrixMatrixMultiply}(L, M), L^{-1}), \\ & \text{MatrixMatrixMultiply } (\text{MatrixMatrixMultiply}(L^{-1}, M), L), \\ & \text{MatrixMatrixMultiply } (\text{MatrixMatrixMultiply}(U, M), U^{-1}), \\ & \text{MatrixMatrixMultiply } (\text{MatrixMatrixMultiply}(U^{-1}, M), U) \end{aligned}$$

ce qui nous donne la fonction :

$$f := M \longmapsto L^2ML^{-2}, L^{-2}ML^2, U^2MU^{-2}, U^{-2}MU^2$$

On définit une fonction g qui calcule le triplet pythagoricien extrait de chaque matrice :

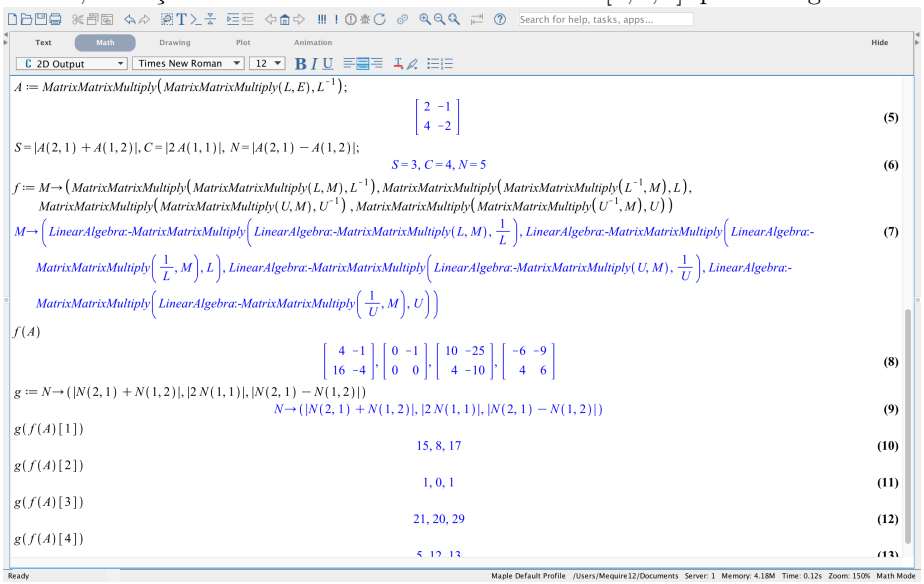
$$g := N \longmapsto (|N(2,1) + N(1,2)|, |2 * N(1,1)|, |N(2,1) - N(1,2)|)$$

ce qui nous donne la fonction

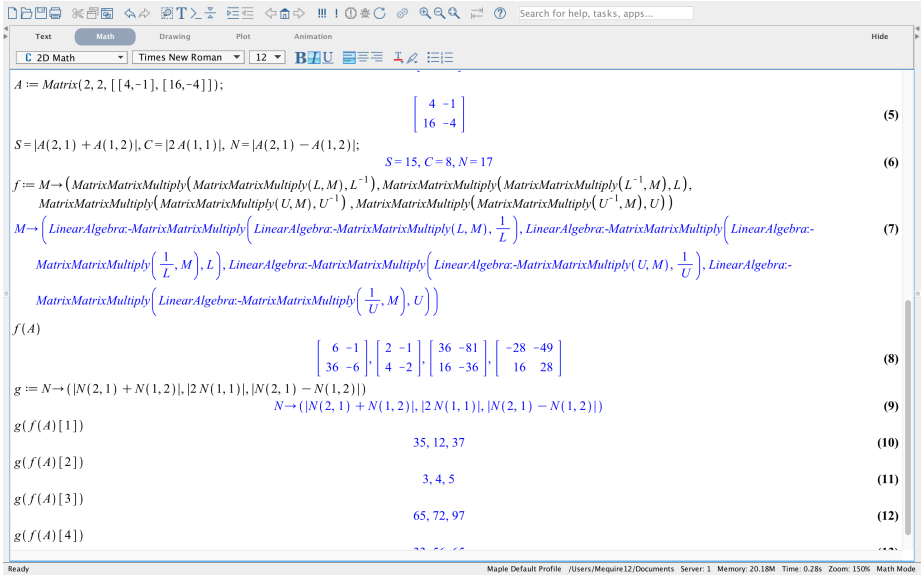
$$g := N \longmapsto |x_{2,1} + x_{1,2}|, |2x_{1,1}|, |x_{2,1} - x_{1,2}|$$

où $x_{a,b}$ et le coefficient de la ligne a et de la colonne b dans la matrice. Par la fonction $g \circ f$, on trouve les trois prochains triplets pythagoriciens du niveau -1 de l'arbre issus du noeud du niveau 0 de l'arbre.

Attention ! Il y a toujours une des quatres matrices reçues de f et un des quatre triplets reçus après avoir appliqué $g \circ f$ qu'il faut négliger parce que ce sont la matrice et le triplet du noeud précédent, donc ici, comme c'est le premier niveau, on reçoit une fois la matrice E et un noeud $[1, 0, 1]$ qu'on va ignorer.

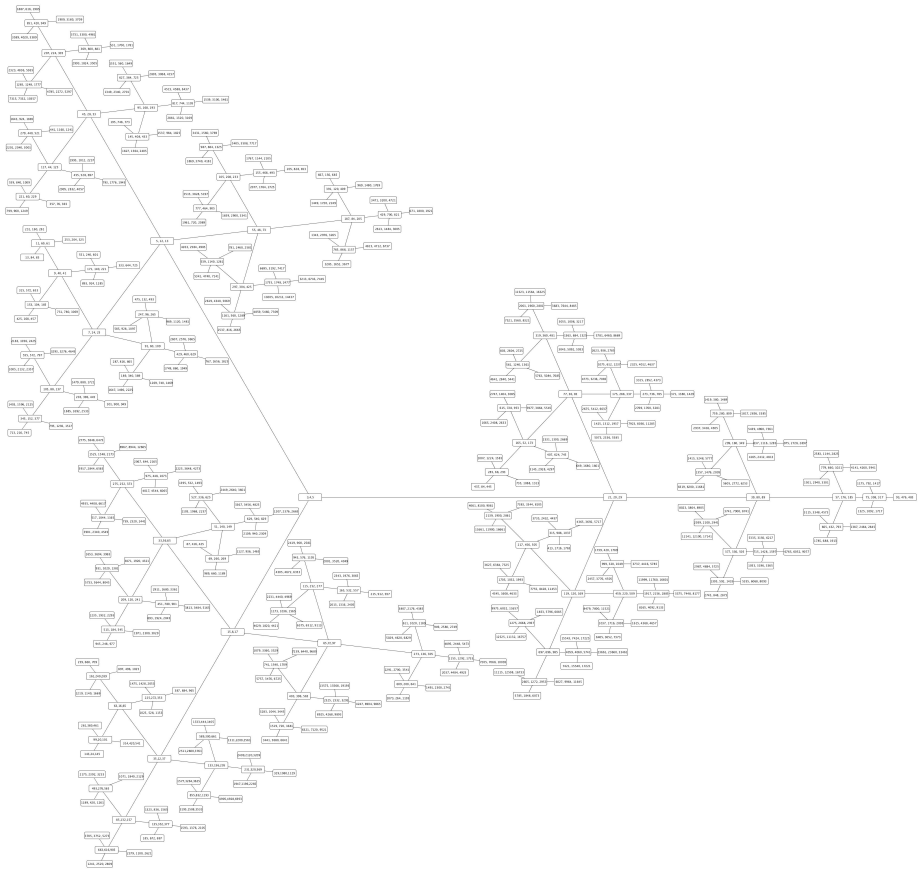


On note les quatres matrices et leurs triplets correspondants ensemble sur leurs noeuds respectifs. Pour trouver maintenant les noeuds du prochain niveau, il faut toujours définir la matrice A comme la matrice du noeud d'où on part, et faire les mêmes calculs dans le logiciel comme avant. On reçoit 4 matrices avec 4 triplets correspondants dont on va ignorer la matrice et le triplet qui sont les mêmes que ceux du noeud précédent. On va répéter cette méthode avec toutes les matrices d'un niveau pour enfin trouver le prochain niveau de l'arbre.

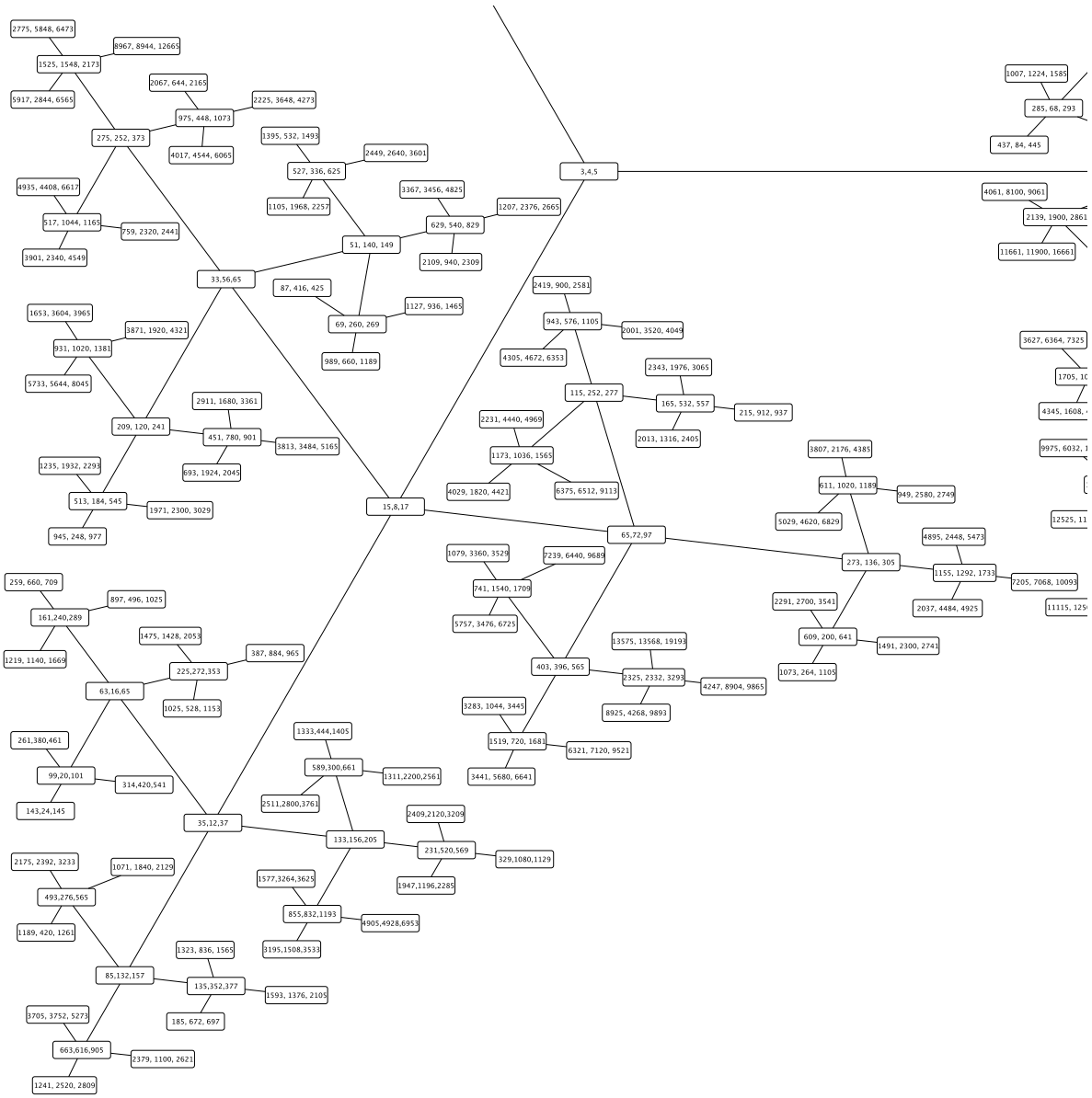


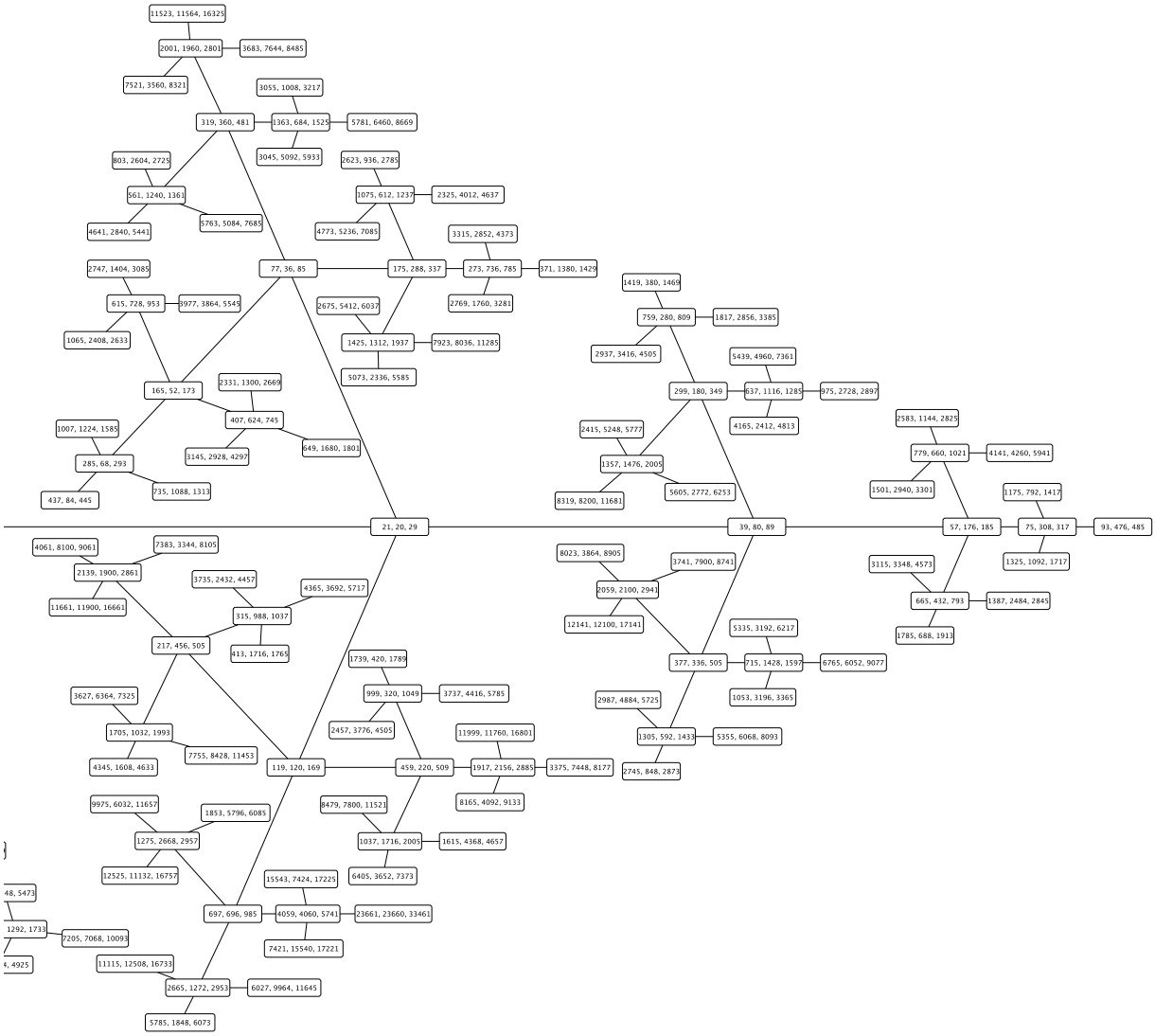
5 Graphique de l'arbre modulaire de Pythagore jusqu'au cinquième niveau

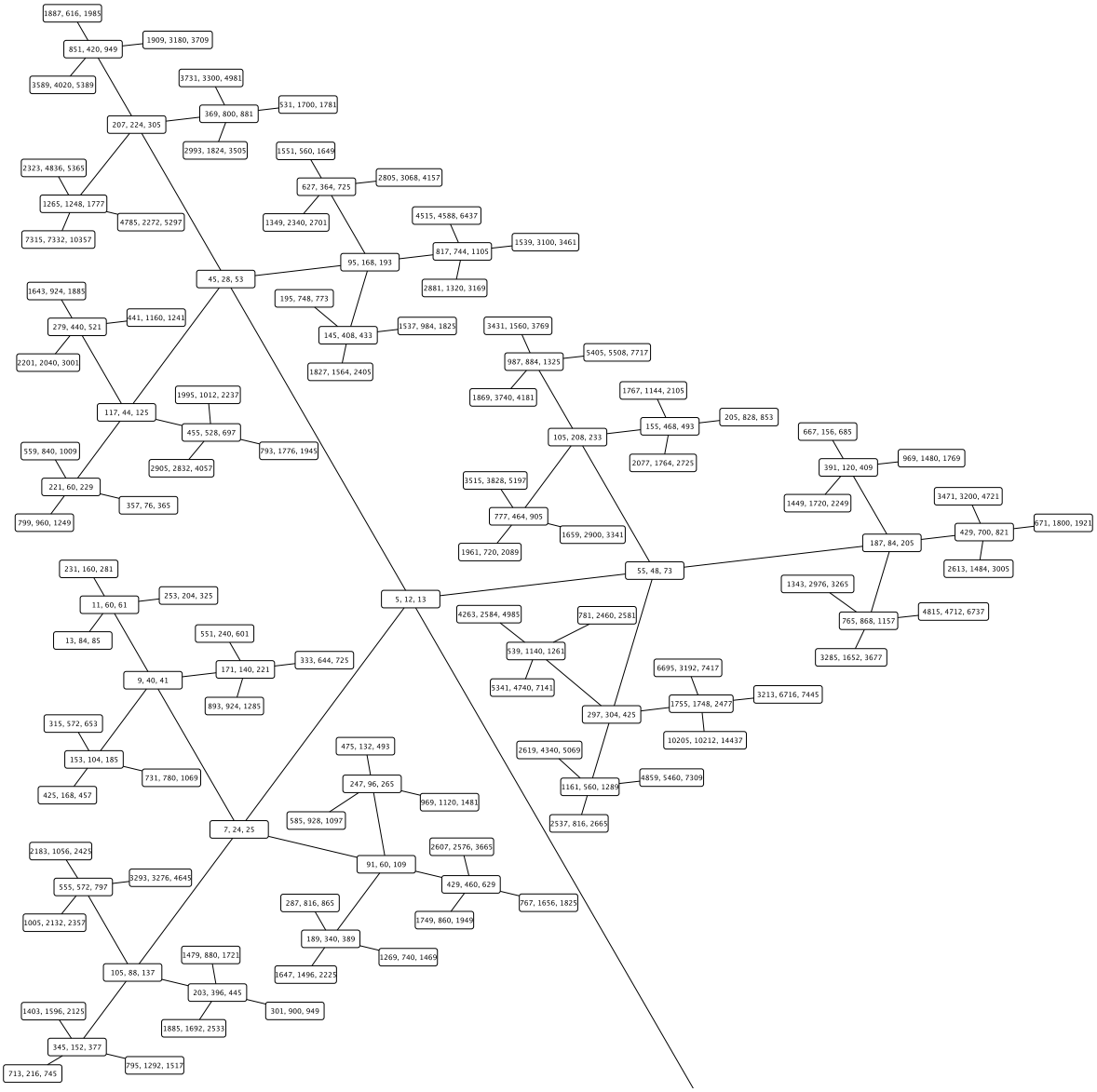
L'arbre modulaire de Pythagore jusqu'au cinquième niveau comprend en tout 364 noeuds. J'ai construit cet arbre à l'aide du logiciel yEd, un éditeur graphique. J'ai noté les matrices correspondantes aux triplets pythagoriciens à la main sur une feuille pour ensuite calculer les triplets pythagoriciens du prochain niveau. J'ai construit d'abord la structure de l'arbre, et puis j'ai anoté chaque triplet pythagoricien dans un des trois noeuds correspondant au bon niveau de manière arbitrière. Les triplets dans les noeuds sont toujours sous la forme S, C, N tel que $S^2 + C^2 = N^2$.



En détails :


2775, 5848, 6473
8967, 8944, 12665
1525, 1548, 2173
5917, 2844, 6565
2067, 644, 2165
2225, 3648, 4273
975, 448, 1073
4017, 4544, 6065
275, 252, 373
1395, 532, 1493
2449, 2640, 3601
527, 336, 625
1105, 1968, 2257
4935, 4408, 6617
517, 1044, 1165
759, 2320, 2441
3901, 2340, 4549
3367, 3456, 4825
1207, 2376, 2665
629, 540, 829
2109, 940, 2309
51, 140, 149
33,56,65
87, 416, 425
1127, 936, 1465
69, 260, 269
989, 660, 1189
1653, 3604, 3965
3871, 1920, 4321
931, 1020, 1381
5733, 5644, 8045
2911, 1680, 3361
209, 120, 241
451, 780, 901
3813, 3484, 5165
693, 1924, 2045
1235, 1932, 2293
513, 184, 545
1971, 2300, 3029
945, 248, 977
3,4,5
1007, 1224, 1585
285, 68, 293
437, 84, 445
4061, 8100, 9061
2139, 1900, 2861
11661, 11900, 16661
2419, 900, 2581
943, 576, 1105
2001, 3520, 4049
4305, 4672, 6353
2343, 1976, 3065
115, 252, 277
165, 532, 557
215, 912, 937
2013, 1316, 2405
2231, 4440, 4969
1173, 1036, 1565
4029, 1820, 4421
6375, 6512, 9113
15,8,17
65,72,97
3627, 6364, 7325
1705, 1
4345, 1608,
9975, 6032,
3807, 2176, 4385
611, 1020, 1189
949, 2580, 2749
5029, 4620, 6829
12525, 11
4895, 2448, 5473
273, 136, 305
1155, 1292, 1733
7205, 7068, 10093
2037, 4484, 4925
11115, 125
1079, 3360, 3529
7239, 6440, 9689
741, 1540, 1709
5757, 3476, 6725
2291, 2700, 3541
609, 200, 641
1491, 2300, 2741
1073, 264, 1105
13575, 13568, 19193
403, 396, 565
2325, 2332, 3293
4247, 8904, 9865
8925, 4268, 9893
3283, 1044, 3445
1519, 720, 1681
6321, 7120, 9521
3441, 5680, 6641
259, 660, 709
897, 496, 1025
161,240,289
1219, 1140, 1669
1475, 1428, 2053
387, 884, 965
225,272,353
1025, 528, 1153
63,16,65
261,380,461
99,20,101
314,420,541
143,24,145
1333,444,1405
589,300,661
1311,2200,2561
2511,2800,3761
35,12,37
2409,2120,3209
133,156,205
231,520,569
329,1080,1129
1947,1196,2285
2175, 2392, 3233
1071, 1840, 2129
493,276,565
1189, 420, 1261
1577,3264,3625
855,832,1193
4905,4928,6953
3195,1508,3533
1323, 836, 1565
85,132,157
135,352,377
1593, 1376, 2105
185, 672, 697
3705, 3752, 5273
663,616,905
2379, 1100, 2621
1241, 2520, 2809


11523, 11564, 16325
2001, 1960, 2801
3683, 7644, 8485
7521, 3560, 8321
3055, 1008, 3217
319, 360, 481
1363, 684, 1525
5781, 6460, 8669
3045, 5092, 5933
803, 2604, 2725
2623, 936, 2785
561, 1240, 1361
1075, 612, 1237
2325, 4012, 4637
5763, 5084, 7685
4641, 2840, 5441
4773, 5236, 7085
3315, 2852, 4373
2747, 1404, 3085
77, 36, 85
175, 288, 337
273, 736, 785
371, 1380, 1429
615, 728, 953
3977, 3864, 5545
2675, 5412, 6037
2769, 1760, 3281
1065, 2408, 2633
1425, 1312, 1937
7923, 8036, 11285
5073, 2336, 5585
2331, 1300, 2669
165, 52, 173
407, 624, 745
1007, 1224, 1585
649, 1680, 1801
3145, 2928, 4297
285, 68, 293
735, 1088, 1313
437, 84, 445
1419, 380, 1469
759, 280, 809
1817, 2856, 3385
2937, 3416, 4505
5439, 4960, 7361
299, 180, 349
837, 1116, 1285
975, 2728, 2897
4165, 2412, 4813
2415, 5248, 5777
1357, 1476, 2005
5605, 2772, 6253
8319, 8200, 11681
2583, 1144, 2825
779, 660, 1021
4141, 4260, 5941
1501, 2940, 3301
1175, 792, 1417
21, 20, 29
39, 80, 89
57, 176, 185
75, 308, 317
93, 476, 485
1325, 1092, 1717
4061, 8100, 9061
7383, 3344, 8105
2139, 1900, 2861
3735, 2432, 4457
4365, 3692, 5717
11661, 11900, 16661
315, 988, 1037
217, 456, 505
413, 1716, 1765
1739, 420, 1789
3627, 6364, 7325
999, 320, 1049
3737, 4416, 5785
1705, 1032, 1993
2457, 3776, 4505
11999, 11760, 16801
7755, 8428, 11453
4345, 1608, 4633
119, 120, 169
459, 220, 509
1917, 2156, 2885
3375, 7448, 8177
8165, 4092, 9133
9975, 6032, 11657
1853, 5796, 6085
8479, 7800, 11521
1275, 2668, 2957
1037, 1716, 2005
1615, 4368, 4657
12525, 11132, 16757
6405, 3652, 7373
15543, 7424, 17225
697, 696, 985
4059, 4060, 5741
23661, 23660, 33461
7421, 15540, 17221
11115, 12508, 16733
2665, 1272, 2953
6027, 9964, 11645
5785, 1848, 6073
8023, 3864, 8905
3741, 7900, 8741
2059, 2100, 2941
12141, 12100, 17141
5335, 3192, 6217
377, 336, 505
715, 1428, 1597
6765, 6052, 9077
1053, 3196, 3365
2987, 4884, 5725
1305, 592, 1433
5355, 6068, 8093
2745, 848, 2873
3115, 3348, 4573
665, 432, 793
1387, 2484, 2845
1785, 688, 1913


1887, 616, 1985
851, 420, 949
1909, 3180, 3709
3589, 4020, 5389
3731, 3300, 4981
369, 800, 881
531, 1700, 1781
207, 224, 305
2993, 1824, 3505
1551, 560, 1649
2323, 4836, 5365
627, 364, 725
2805, 3068, 4157
1265, 1248, 1777
4785, 2272, 5297
1349, 2340, 2701
4515, 4588, 6437
7315, 7332, 10357
817, 744, 1105
1539, 3100, 3461
95, 168, 193
45, 28, 53
2881, 1320, 3169
1643, 924, 1885
195, 748, 773
279, 440, 521
441, 1160, 1241
1537, 984, 1825
145, 408, 433
3431, 1560, 3769
2201, 2040, 3001
1827, 1564, 2405
5405, 5508, 7717
987, 884, 1325
1995, 1012, 2237
1869, 3740, 4181
1767, 1144, 2105
117, 44, 125
205, 828, 853
155, 468, 493
105, 208, 233
667, 156, 685
455, 528, 697
793, 1776, 1945
2077, 1764, 2725
559, 840, 1009
969, 1480, 1769
391, 120, 409
3515, 3828, 5197
2905, 2832, 4057
221, 60, 229
1449, 1720, 2249
3471, 3200, 4721
777, 464, 905
357, 76, 365
1659, 2900, 3341
671, 1800, 1921
429, 700, 821
799, 960, 1249
1961, 720, 2089
187, 84, 205
231, 160, 281
55, 48, 73
2613, 1484, 3005
1343, 2976, 3265
253, 204, 325
5, 12, 13
4263, 2584, 4985
781, 2460, 2581
4815, 4712, 6737
11, 60, 61
765, 868, 1157
13, 84, 85
539, 1140, 1261
3285, 1652, 3677
551, 240, 601
333, 644, 725
171, 140, 221
6695, 3192, 7417
9, 40, 41
5341, 4740, 7141
3213, 6716, 7445
1755, 1748, 2477
893, 924, 1285
297, 304, 425
315, 572, 653
10205, 10212, 14437
475, 132, 493
2619, 4340, 5069
153, 104, 185
731, 780, 1069
4859, 5460, 7309
247, 96, 265
1161, 560, 1289
425, 168, 457
969, 1120, 1481
585, 928, 1097
2537, 816, 2665
7, 24, 25
2607, 2576, 3665
2183, 1056, 2425
91, 60, 109
3293, 3276, 4645
429, 460, 629
555, 572, 797
767, 1656, 1825
287, 816, 865
1005, 2132, 2357
1749, 860, 1949
189, 340, 389
1269, 740, 1469
1479, 880, 1721
105, 88, 137
1647, 1496, 2225
203, 396, 445
1403, 1596, 2125
301, 900, 949
1885, 1692, 2533
345, 152, 377
795, 1292, 1517
713, 216, 745

6 Conclusion

Lors des chapitres 1,2 et 3 nous avons vu la description de l'arbre modulaire de Pythagore ce qui nous a permis de trouver un algorithme de construction de cet arbre, que nous avons réalisée dans le logiciel Maple (Chapitre 4).
À partir des résultats trouvés dans Maple, nous avons pu réaliser l'objectif principal de ce travail, qui était de réaliser l'arbre modulaire de Pythagore jusqu'au cinquième niveau (Chapitre 5).