

Marches aléatoires,  
Loi de l'arcsinus  
et  
Mouvement Brownien

Lia Malato Leite  
Robert Contignon

Mathématiques Expérimentales

Université du Luxembourg

Faculté des Sciences,  
de la Technologie et de la Communication  
Semestre 3 2016/2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Marche aléatoire sur <math>\mathbb{Z}</math></b>	<b>5</b>
2.1	Un exemple intuitif: Pile ou Face . . . . .	5
2.2	Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ . . . . .	7
2.3	Marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ . . . . .	8
2.3.1	Premiers résultats . . . . .	8
2.3.2	Principe de réflexion . . . . .	15
2.3.3	Retours à l'origine . . . . .	16
2.3.3.1	Premier retour à l'origine . . . . .	18
2.3.3.2	Dernier retour à l'origine et loi de l'arcsinus . . . . .	20
2.3.4	Retours à un point quelconque . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Marche aléatoire sur <math>\mathbb{Z}^d</math></b>	<b>31</b>
3.1	La marche aléatoire en dimensions supérieures . . . . .	31
3.2	Marche aléatoire à 2 dimensions . . . . .	32
3.2.1	Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	32
3.2.2	Interprétation: le chemin de l'ivrogne . . . . .	34
3.2.3	Distribution gaussienne . . . . .	35
3.3	Marche aléatoire à 3 dimensions . . . . .	37
3.3.1	Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^3$ . . . . .	37
3.3.2	Interprétation: le vol d'un oiseau . . . . .	38
3.4	Quelques applications des marches aléatoires . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Le mouvement Brownien</b>	<b>39</b>
4.1	Côté historique et intérêt . . . . .	39
4.2	Construction mathématique . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Étude informatique de la marche aléatoire symétrique sur <math>\mathbb{Z}</math>, de la loi arcsinus et du mouvement Brownien</b>	<b>43</b>
5.1	Étude informatique de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ et de la loi arcsinus . . . . .	43
5.1.1	Description du programme sur <i>Sage</i> . . . . .	43
5.1.2	Quelques extraits du programme . . . . .	46
5.2	Étude informatique du mouvement Brownien . . . . .	49
5.2.1	Influence de la superficie du champ de déplacement sur le mouvement Brownien . . . . .	49
5.2.2	Influence du nombre de positions mesurées sur le mou- vement Brownien . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>



## Liste des figures

1	Tous les résultats possibles en 5 lancers . . . . .	6
2	Représentation d'une marche aléatoire . . . . .	9
3	Représentation graphique de $f(t)$ . . . . .	23
4	Représentation graphique de $F(t)$ . . . . .	23
5	Représentation informelle d'une marche aléatoire d'un pas en dimension 2 . . . . .	32
6	Trois marches aléatoires de 10000 pas en dimension 2 . . . . .	33
7	Répartition des probabilités après 10 pas . . . . .	35
8	Répartition des probabilités après 60 pas . . . . .	35
9	Distribution gaussienne . . . . .	36
10	5000 marches aléatoires différentes d'un marcheur ivre pour 100 pas . . . . .	36
11	Distribution gaussienne des positions finales associées aux 5000 marches aléatoires . . . . .	36
12	Trois marches aléatoires de 10000 pas en dimension 3 . . . . .	37
13	Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 1 (unité quelconque) . . . . .	49
14	Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 5 (unité quelconque) . . . . .	50
15	Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 10 (unité quelconque) . . . . .	50
16	Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 20 (unité quelconque) . . . . .	51
17	25 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	53
18	50 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	54
19	100 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	55
20	200 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	56
21	400 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	56
22	800 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	57
23	1600 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	58
24	3200 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité . . . . .	58

# 1 Introduction

Tout le monde a sûrement déjà entendu, et certains ont même vécu, la situation suivante : Vous passez une agréable soirée entre amis ou en famille; on vous propose entre autres des digestifs comme du Ricard ou du whisky et il y a même de la bière (pas celle sans alcool). Vous êtes alors naturellement tenté d'en boire un peu. Mais comme il s'agit d'une soirée différente des autres, vous en profitez pour boire 2, puis 3, puis 4 verres d'alcool. À la fin de cette soirée, vous avez avalé en tout 5 bons verres d'alcool et, fort heureusement, vous êtes venu à pied vu que vous habitez dans la rue d'à côté.

Hélas, vous devez repartir tout seul chez vous, car tous vos amis sont partis chacun de leur côté. Du coup, vous vous mettez en chemin à pied pour rentrer à la maison. Toutefois, vous êtes tellement ivre, que vous ne vous rappelez plus exactement quel chemin emprunter pour arriver à la maison. Vous vous décidez alors à parcourir les rues aléatoirement jusqu'à votre destination. La question que beaucoup de gens se posent alors est la suivante : Est-ce que vous parviendrez à retrouver votre maison par hasard?

La réponse va sûrement étonner plus d'un, car oui, vous arriverez forcément tôt ou tard à rentrer chez vous ! En effet, même si vous vous déplacez aléatoirement, il s'avère que les mathématiques permettent de justifier cette réponse à l'aide d'un outil appelé **marche aléatoire**, ce qui montre que même le hasard peut être prédit par les mathématiques!

Ce document débutera par une introduction simple et intuitive de la base de ce problème mathématique en utilisant l'exemple d'un jeu équilibré de pile ou face, puis en passant par la *marche aléatoire* sur  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 1$ , un modèle à caractère discret constitué par une séquence de pas aléatoires, qui sera démontré à l'aide d'arguments de nature purement combinatoire et d'approximations d'une grande importance. La *loi de l'arcsinus* sera ensuite construite progressivement à l'aide des notions du chapitre sur les marches aléatoires simples symétriques sur  $\mathbb{Z}$ . Une fois cette notion clarifiée, on accordera notre attention à l'exemple le plus fameux des marches aléatoires: le *mouvement Brownien*.

On aboutira à des résultats incroyables et contre-intuitifs.

On terminera par la description du programme sur *Sage* sur l'étude des marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$ , sur la loi de l'arcsinus et sur mouvement Brownien.

## 2 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

### 2.1 Un exemple intuitif: Pile ou Face

Considérons une pièce de monnaie parfaitement symétrique. Dans un jeu de pile ou face, il existe pour chaque lancer, comme le nom l'indique, deux résultats possibles: *pile* et *face*. Il est évident que chaque lancer de pièce est indépendant des autres. Comme la pièce considérée dans cet exemple est parfaitement symétrique, la probabilité de face est égale à celle de pile. Soit  $P$  = l'évènement "pile" et  $F$  = l'évènement "face". On a:

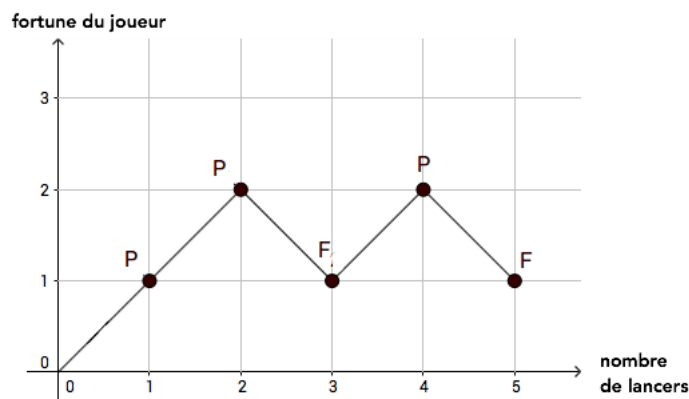
$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}.$$

Considérons maintenant un jeu de pile ou face où un joueur joue contre une banque. Pour chaque lancer, si le résultat est "pile", le joueur gagne 1€ de la banque. Dans le cas où le résultat est "face", le joueur perd 1€. Ceci est répété un nombre fini de fois. Il est clair que chaque lancer n'est pas influencé par les lancers précédents.

Considérons un jeu de 5 lancers. Par exemple, la séquence suivante est obtenue aléatoirement avec les résultats des 5 lancers:

$$P, P, F, P, F$$

Ce résultat peut alors être représenté sur un repère où l'axe des abscisses représente le nombre de lancers du jeu et l'axe des ordonnées les gains possibles du joueur. Le jeu considéré avec les résultats ci-dessus peut être représenté de la forme suivante:



Dans cette représentation les résultats des lancers ont été liés par une ligne brisée qui part de l'origine.

En observant ce premier résultat, le joueur aura gagné contre la banque. En effet, le joueur aura gagné 1€ à la fin de ce jeu.

Il est évident que la séquence considérée auparavant n'est qu'une parmi plusieurs séquences possibles. En fait, le nombre de séquences possibles augmente avec le nombre de lancers considérés pour un jeu de pile ou face. Chaque séquence possible peut ainsi être représentée par une ligne brisée comme celle vue pour les 5 lancers ci-dessus. Pour 5 lancers, il existe  $2^5 = 32$  séquences différentes possibles, chacune ayant une probabilité de  $\frac{1}{32}$ .

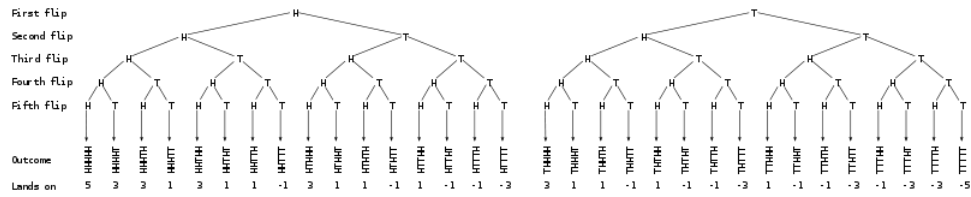
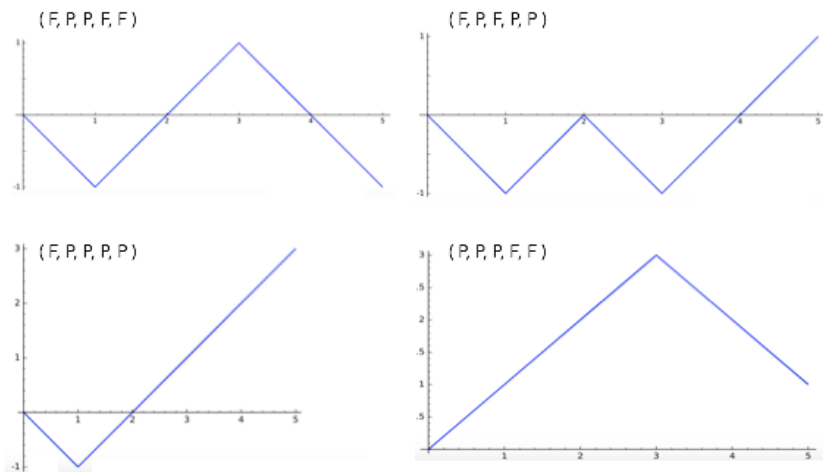


Figure 1 – Tous les résultats possibles en 5 lancers

Dans la figure ci-dessus  $H$  est le résultat "pile" et  $T$  le résultat "face".

Voici les représentations de quatre autres séquences des 32 séquences possibles pour un jeu de pile ou face avec 5 lancers, tout comme les 4 séquences de résultats correspondantes.



Les résultats finaux possibles, c'est-à-dire les fortunes possibles, après 5 lancers peuvent être:  $+1$ ,  $-1$ ,  $+3$ ,  $-3$ ,  $+5$  et  $-5$ . Il est intéressant de remarquer que, sur 5 lancers, il y a:

- 10 manières différentes de terminer sur  $+1$  (trois fois pile et deux fois face)
- 10 autres pour  $-1$  (trois fois face et deux fois pile)
- 5 autres pour  $+3$  (quatre fois pile et une fois face)
- 5 autres pour  $-3$  (quatre fois face et une fois pile)
- 1 pour  $+5$  (cinq fois piles)
- 1 pour  $-5$  (cinq fois face)

On observe les valeurs suivantes auxquelles on en reviendra ultérieurement:

1      5      10      10      5      1

Approfondissons ce jeu simpliste de pile ou face vers un modèle mathématique afin d'obtenir l'ampleur des marches aléatoires.

## 2.2 Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$

Considérons dans l'ensemble du document l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

On se focalisera uniquement sur l'idée et la construction derrière la notion de la marche aléatoire simple qui est la base des résultats et des théorèmes les plus importants à traiter pour le cas des marches aléatoires simples symétriques définies dans la section suivante.

La marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  est aussi appelée marche aléatoire unidimensionnelle. Commençons donc par l'étude de la notion de marche aléatoire simple qui permettra la compréhension des marches aléatoires symétriques sur  $\mathbb{Z}$ , les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 1$ , la loi de l'arcsinus et le mouvement Brownien.

Pour cette construction de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ , on se basera sur le document "Probabilités et Statistiques", section 3.1 "Description du processus" de Y. Velenik, Université de Genève:



"On désire modéliser l'évolution (aléatoire) suivante d'une particule sur les sommets du graphe  $\mathbb{Z}$ :

- la particule part (au temps  $n = 0$ ) du sommet  $a \in \mathbb{Z}$ ;
- la particule se déplace aux temps  $n = 1, 2, \dots$ ;
- les déplacements se font d'un sommet de  $\mathbb{Z}$  vers l'un de ses deux voisins;
- la probabilité de se déplacer vers le sommet de droite est  $p$ ;
- les sauts sont indépendants.



(...)

La marche aléatoire simple est dite symétrique lorsque  $p = q = \frac{1}{2}$ ."

où  $q = 1 - p$ , *id est*,  $q$  est la probabilité que la particule se déplace vers le sommet de gauche.

### 2.3 Marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$

Après avoir vu l'idée derrière les marches aléatoires simples, penchons-nous sur un sous-type de ces marches aléatoires unidimensionnelles, à savoir les marches aléatoires simples symétriques.

Étudions un système à dynamique discrète centré sur le hasard lui-même. Formalisons la notion de marche aléatoire et introduisons quelques notions de base.

#### 2.3.1 Premiers résultats

Comme mentionné précédemment, une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  est appelée marche aléatoire simple symétrique quand la probabilité  $p$  est égale à la probabilité  $q$ . C'est le cas de l'exemple du jeu de pile ou face considéré dans la sous-section "Un exemple intuitif: Pile ou Face".

Définissons maintenant la marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}$  que l'on appellera de façon simplifiée marche aléatoire symétrique.

**Définition 1 : Marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ :** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telle que chaque variable prend les valeurs  $+1$  ou  $-1$ , avec:

$$\mathbb{P}\{X_n = 1\} = \mathbb{P}\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$$

On définit:

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^n X_i \end{cases}$$

La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  est appelée *marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$*

Remarque:

$$X_n = S_n - S_{n-1} \in \{\pm 1\}$$

Les unités élémentaires qui forment les marches aléatoires sont appelées *pas*.

Comme pour les marches aléatoires simples, nous allons considérer une particule se déplaçant selon une marche aléatoire symétrique.

Dans un même quadrillage on placera en abscisses les pas de la marche aléatoire et en ordonnées les valeurs possibles pour  $S_n$ . La particule considérée partira de l'origine et à chaque instant effectuera un déplacement aléatoire suivant une marche aléatoire symétrique unidimensionnelle. Nous allons considérer la longueur constante 1 pour les pas de la plupart des marches aléatoires dans ce document.

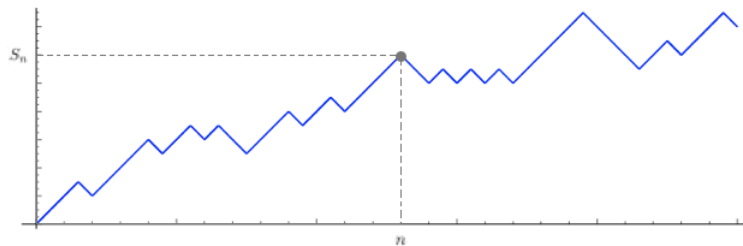


Figure 2 – Représentation d'une marche aléatoire

Dans un jeu de pile ou face:

- $X_n$  représente le résultat du  $n$ -ième lancer
- $S_n$  représente la fortune, le gain, du joueur après  $n$  lancers

De plus,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $X_i$  représente le déplacement entre les temps  $i$  et  $i + 1$ .

Remarque: Étant donné que les variables aléatoires sont indépendantes et totalement décorréliées, les marches aléatoires ont un caractère Markovien. Effectivement, le futur de la marche aléatoire dépend uniquement du pas actuel. Le passé de la marche aléatoire n'a aucune influence sur le futur de la marche. Seule la position  $S_{n-1}$  à l'instant  $n - 1$  affectera la position  $S_n$  à l'instant  $n$ :

$$S_n = S_{n-1} + X_n.$$

On peut constater que l'espérance de  $S_n$  vaut 0, la variance vaut  $n$  et l'écart-type vaut  $\sqrt{n}$ .

En effet, l'espérance  $\mathbb{E}[S_n]$  est nulle. On a

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = 0.$$

puisque

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \dots = \mathbb{E}[X_n] = 0$$

Par des calculs similaires on retrouve également:

$$E[S_n^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i X_j] = n$$

puisque

$$E[X_i X_j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ E[X_i]E[X_j] = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ceci suggère que la distance attendue après  $n$  pas, doit être dans l'ordre de  $\sqrt{n}$ .

De plus, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la Loi des grands nombres sont vraies pour les marches aléatoires symétriques sur  $\mathbb{Z}$ .

Par la suite, dans ce document nous associerons le résultat du jeu "pile" au résultat  $X_i = +1$  et le résultat "face" au résultat  $X_i = -1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  dans une marche aléatoire à  $n$  pas.

Une marche aléatoire peut être représentée à l'aide d'une ligne brisée (voir Figure 2) comme vu lors de l'exemple de pile ou face avec 5 lancers. Afin d'utiliser cette représentation nous devons définir la notion de *chemin*

d'une marche aléatoire. Ce dernier sera caractérisé par son point de départ, sa longueur et par les résultats de la marche aléatoire considérée. Le chemin sera bien une ligne brisée qui reliera  $n + 1$  points de coordonnées  $(i, S_i)_{i=0, \dots, n}$ .

**Définition 2 : Chemin**<sup>1</sup> Soit  $n > 0$ ,  $m \geq 0$  et  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Un *chemin* du point  $(m, a)$  au point  $(n, b)$  est une ligne brisée, c'est-à-dire une suite de segments joignant des points successifs du plan  $(m_0, a_0), (m_1, a_1), \dots, (m_r, a_r)$ , qui commence au point  $(m_0, a_0) = (m, a)$  et se termine au point  $(m_r, a_r) = (n, b)$ , et tel que pour tout  $0 \leq i < r$ , on ait  $m_{i+1} = m_i + 1$  et  $a_{i+1} = a_i + 1$  ou  $a_i - 1$ .

Pour la suite du document nous nous concentrerons surtout sur les chemins qui joignent l'origine  $(m, a) = (0, 0)$  au point  $(n, b) = (n, S_n)$ .

Comme toutes les séquences possibles pour la marche aléatoire sont équiprobables, et comme toute séquence peut être représentée par un chemin, on aura naturellement que chaque chemin possible sera équiprobable.

Notation: Nous noterons un chemin pour une marche aléatoire de  $n$  pas par

$$(S_0, S_1, S_2, \dots, S_n)$$

où

$$(S_0, S_1, S_2, \dots, S_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Remarque:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$|S_i - S_{i-1}| = 1.$$

Regardons maintenant pour une marche aléatoire à  $n$  pas, combien de fois  $X_i$  prend la valeur  $+1$  et combien de fois  $X_i$  prend la valeur  $-1$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Soit  $\omega = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \Omega$ . Notons  $n_P$  le nombre de fois où  $X_i = +1$  dans  $\omega$  et  $n_F$  le nombre de fois où  $X_i = -1$  dans  $\omega$ .  $n_P$  est ainsi le nombre de pile et  $n_F$  le nombre de face dans un jeu de pile ou face à  $n$  lancers.

---

1. Définition de chemin selon le document "Marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$ ", sous le site <http://culturemath.ens.fr/math/pdf/proba/marchesZ.pdf>

Les relations suivantes peuvent être déduites:

$$\begin{aligned}n &= n_P + n_F \\s_n &= n_P - n_F.\end{aligned}$$

On peut réécrire ces informations sous forme du système suivant:

$$\begin{cases}n = n_P + n_F \\s_n = n_P - n_F\end{cases}$$

ou encore:

$$\begin{cases}n_P = \frac{n+s_n}{2} \\n_F = \frac{n-s_n}{2}\end{cases}$$

Pour tout évènement  $\omega \in \Omega$  d'une marche aléatoire de  $n$  pas il existe un chemin entre les  $2^n$  chemins possibles de longueur  $n$  qui le décrit.

La position  $S_n = s_n$  est donnée par:

$$\begin{aligned}s_n &= n_P - (n - n_H) \\&= 2n_P - n\end{aligned}$$

$n_P$  admet les valeurs  $0, 1, 2, \dots, n$ , ainsi

$$s_n \in \{-n, -(n-2), \dots, n-2, n\}$$

**Proposition 1** La probabilité d'un chemin  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$  pour une marche aléatoire à  $n$  pas est égale à

$$\frac{1}{2^n}$$

Tous les chemins sont équiprobables.

*Proof.* Considérons un chemin  $(S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n)$ . On a  $s_0 = 0$  et  $s_i - s_{i-1} \in \pm 1$  pour  $i \in 1, \dots, n$ . On a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n\} &= \mathbb{P}\{X_1 = s_1 - s_0, X_2 = s_2 - s_1, \dots, X_n = s_n - s_{n-1}\} \\&= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i = s_i - s_{i-1}\} \\&= \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

puisque  $\mathbb{P}\{X_i = s_i - s_{i-1}\} = \frac{1}{2}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  □

On s'intéresse maintenant au nombre de chemins différents possibles entre l'origine  $(0, 0)$  et un point quelconque.

On verra que beaucoup des résultats ont leur base dans le calcul combinatoire. Dans ce document on notera pour  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Proposition 2** Considérons un point  $A = (n, s_n)$ . Le nombre de chemins possibles entre l'origine et le point  $A$ , c'est-à-dire, le nombre de chemins qui font arriver une particule à la position  $s_n$  au temps  $n$  est

$$N_{n,s_n} = \binom{n}{n_P} = \binom{n}{n_F} = \binom{n}{\frac{n+s_n}{2}}$$

Convention:

$$N_{n,s_n} = 0 \text{ si } \binom{n}{\frac{n+s_n}{2}} \notin \mathbb{Z}_{>0}$$

Certains des résultats peuvent être déduits par les propriétés du triangle de Pascal. Comme mentionné auparavant, le nombre de chemins différents avec  $n$  pas est égal à  $2^n$ , c'est ainsi qu'on trouve pour une marche aléatoire de 5 pas (comme celle de l'exemple dans la section "Un exemple intuitif: Pile ou Face") 32 chemins possibles deux-à-deux disjoints et équiprobables. Comme vu dans la proposition précédente, le calcul du nombre de chemins qui satisfont  $S_n = s_n$  (pour un entier  $s_n$ ) pour un instant  $n$  revient à calculer

$$\binom{n}{\frac{n-s_n}{2}}$$

où  $n$  et  $s_n$  doivent être pairs.

Mais quelle sera la probabilité que la particule arrive au point  $A$ ?

**Proposition 3** Notons la probabilité que la particule arrive au point  $S_n = s_n$  à l'instant  $n$ , par  $p_{n,s_n}$ . Ainsi:

$$\mathbb{P}\{S_n = s_n\} = p_{n,s_n} = \frac{1}{2^n} N_{n,s_n} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+s_n}{2}}$$

Pour  $k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  le nombre de façons différentes d'arriver sur  $S_n = k$  est donné dans le tableau suivant:

<b>k</b>	<b>-5</b>	<b>-4</b>	<b>-3</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
$P[S_0 = k]$						1					
$2P[S_1 = k]$					1		1				
$2^2P[S_2 = k]$				1		2		1			
$2^3P[S_3 = k]$			1		3		3		1		
$2^4P[S_4 = k]$		1		4		6		4		1	
$2^5P[S_5 = k]$	1		5		10		10		5		1

On obtient bien les résultats trouvés lors de la section "Exemple intuitif: Pile ou Face" pour 5 lancers.

Remarque: Le nombre de chemins qui passent par le point  $A$  en  $n + 1$  pas est égal à

$$2N_{n,s_n}.$$

En effet, après la  $n$ -ième itération, la valeur pour la  $(n + 1)$ -ième itération sera soit  $+1$  soit  $-1$ , ce qui explique le résultat.

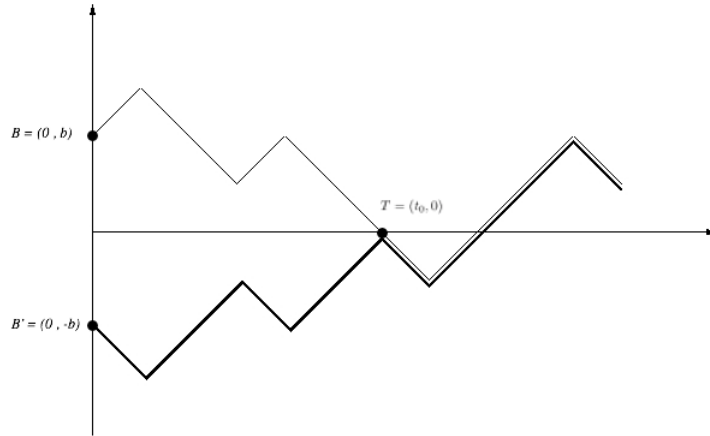
Comparons la probabilité  $p_{n,s_n}$  et la probabilité qu'en  $n + 1$  pas la particule arrive au point  $(n, s_n)$ , qu'on notera  $p'_{n,s_n}$ . Pour  $n + 1$  pas, on obtient la quantité suivante pour  $p'_{n,s_n}$ :

$$p'_{n,s_n} = 2 \binom{n}{\frac{n+s_n}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} = \binom{n}{\frac{n+s_n}{2}} \frac{1}{2^n} = p_{n,s_n}.$$

Les probabilités  $p'_{n,s_n}$  et  $p_{n,s_n}$  sont égales. En clair, que ce soit  $n$  ou  $n + 1$  lancers, la probabilité de passer par le point  $(n, s_n)$  sera la même.

### 2.3.2 Principe de réflexion

**Théorème 1** (Principe de réflexion). *Considérons deux points  $B$ , de coordonnées  $(0, b)$ , et  $C$ , de coordonnées  $(n, s_n)$ , tel que  $n, b > 0$  et  $s_n > 0$ . Soit  $B'$  le point symétrique de  $B$  de coordonnées  $(0, -b)$ . Le nombre de chemins entre  $B$  et  $C$  qui touchent ou coupent l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins entre le point  $B'$  et le point  $C$ .*



*Proof.* Considérons un chemin  $(S_0 = b, S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n)$  du point  $B = (0, b)$  au point  $C = (n, s_n)$  où  $b, n, s_n > 0$  tel que le chemin touche ou traverse au moins une fois l'axe des abscisses. Soit  $t_0$  le premier instant où la marche aléatoire coupe ou traverse l'axe des abscisses, c'est-à-dire quand

$$s_0 = b > 0, s_1 > 0, \dots, s_{t_0-1} > 0, s_{t_0} = 0$$

Considérons ensuite le chemin

$$(-s_0 = -b, -s_1, \dots, -s_{t_0-1}, s_{t_0} = 0, s_{t_0+1}, \dots, s_n)$$

qui joint les points  $B'$  et  $C$  et tel que le point  $T = (t_0, 0)$  est la première intersection avec l'axe des abscisses. Le segment  $B'T$  est la réflexion du segment  $BT$ , il y a donc une bijection entre les chemins entre  $B'$  et  $C$  et les chemins entre  $B$  et  $C$  qui touchent ou traversent l'axe des abscisses.  $\square$

**Théorème 2** (Théorème du ballot). *Soit  $n, s_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Le nombre de chemins  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$  de l'origine  $(s_0 = 0)$  au point  $(n, s_n)$  tel que*

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_{n-1} > 0, s_n > 0$$

est donné par

$$N_{n-1, s_n-1} - N_{n-1, s_n+1} = \frac{s_n}{n} N_{n, s_n}$$



### 2.3.3 Retours à l'origine

Consacrons-nous à présent au problème de la "ruine du joueur", autrement dit dédions nous aux retours à l'origine: on s'intéresse aux instants  $n$  tel que  $S_n = 0$ . Cet évènement correspond au moment où la fortune du joueur est nulle, c'est-à-dire quand le nombre de pile est égal au nombre de face. La marche aléatoire reviendra-t-elle à l'origine? Et si oui, combien de fois? On voudra également observer le comportement de la marche aléatoire pour la situation où le nombre de pas tend vers l'infini, c'est-à-dire, nous allons jeter un coup d'oeil sur le comportement asymptotique d'une marche aléatoire.

Quand on parlera de retour à l'origine on se réfère à l'évènement  $S_n = 0$ .

Avant de nous jeter dans cette étude, regardons la formule qui nous sera très utile pour la suite: *la formule de Stirling*. Elle nous permettra de faire des approximations qui s'approcheront des valeurs réelles pour un  $n$  grand.

Formule de Stirling:

L'approximation de Stirling donne le résultat suivant

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n)$$

pour  $\epsilon_n \rightarrow 0$  et  $n \rightarrow \infty$ . Autrement dit,

$$\frac{n!}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Remarque: Pour un retour à l'origine à un instant  $n$ , l'instant  $n$  considéré doit être nécessairement pair. En effet, si  $n$  est pair alors  $s_n$  sera pair aussi et si  $n$  est impair alors  $s_n$  le sera aussi. Nous allons donc considérer des instants de la forme  $2n$ .

Regardons la probabilité qu'il y ait un retour à l'origine à un instant  $2n$  et notons la  $u_{2n}$ .

**Lemme:** La probabilité qu'il y ait un retour à l'origine à un instant  $2n$  est égale à

$$u_{2n} = \mathbb{P}\{s_{2n} = 0\} = p_{2n,0} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

Notons que  $u_{2n} = 1$  pour  $n = 0$ .

*Proof.* Soient  $P_1 = (0, 0)$  et  $P_2 = (2n, 0)$  deux points. Le nombre de chemins entre  $P_1$  et  $P_2$  est égal à

$$\binom{2n}{n}$$

En plus, il y a  $2^{2n}$  chemins possibles de longueur  $2n$  de même probabilité. Ainsi

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

□

Remarque: Le chemin entre les temps 0 et  $2n - 1$  n'influence pas la probabilité  $u_{2n}$ .

Approximation de Stirling pour la probabilité d'un retour à l'origine à l'instant  $2n$

La formule pour l'approximation de Stirling offre une approximation pour la probabilité d'un retour à l'origine à l'instant  $2n$  pour un  $n$  grand

$$u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} 2^{-2n} \\ &= \frac{e^{-2n} (2n)^{2n} \sqrt{2\pi 2n} (1 + \epsilon_{2n})}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n) e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n)} 2^{-2n} \\ &= \frac{e^{-2n} (2n)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{e^{-2n} n^{2n} 2\pi n} \frac{1 + \epsilon_{2n}}{(1 + \epsilon_n)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1 + \epsilon_{2n}}{(1 + \epsilon_n)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

On obtient donc pour  $n \rightarrow \infty$  bien

$$u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

□

Regardons quelques exemples de cette approximation pour  $n = 1, 2, 3, 5, 25, 50, 500$ .

	$u_2$	$u_4$	$u_6$	$u_{10}$	$u_{50}$	$u_{100}$	$u_{1000}$
$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}$	0.5	0.375	0.3125	0.2461	0.1123	0.0796	0.025225
$u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot n}}$	0.5642	0.3989	0.3257	0.2523	0.1128	0.0798	0.025231
erreur	0.0642	0.0239	0.0132	0.0062	0.0006	0.0002	0.000006

### 2.3.3.1 Premier retour à l'origine

Une question que l'on peut se poser concerne le moment où une particule passera par l'origine pour la première fois.

Dans un jeu de pile ou face entre deux joueurs le premier retour à l'origine représente l'égalité entre les deux joueurs, autrement dit, c'est l'instant où le nombre de pile est égal au nombre de face pour la première fois. Quand le joueur 1 sera-t-il en égalité avec le joueur 2 pour la première fois? Et quelles sont les probabilités associées à cet événement?

Définissons l'instant du premier retour à l'origine de la façon suivante:

$$T_0 = \begin{cases} \inf \{n \geq 1, S_n = 0\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que pour un retour à l'origine l'instant doit être impérativement pair. Prenons une marche aléatoire de  $2N$  pas.

Discutons la probabilité que le premier retour à l'origine soit à un instant  $2n \leq 2N$ , c'est à-dire que l'on ira étudier la probabilité

$$\mathbb{P}\{T_0 = 2n\}$$

Nous allons donc considérer

$$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0,$$

mais tel que

$$S_{2n} = 0$$

Notons ainsi la probabilité que le premier retour à l'origine soit à l'instant  $2n$  par  $f_{2n}$

$$f_{2n} = \mathbb{P}\{T_0 = 2n\}$$

On s'intéresse maintenant au calcul de la probabilité du premier retour à l'origine. Pour commencer, nous pouvons observer qu'il existe une relation entre les probabilités  $u_{2n}$  et  $f_{2n}$ .

**Théorème 3** (Relation entre  $u_{2n}$  et  $f_{2n}$ ). *Pour  $n \geq 1$*

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \dots + f_{2n} u_0$$

Regardons maintenant comment calculer  $f_{2n}$ .

**Théorème 4.** *Pour  $n = 1, 2, \dots, N$*

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

*En particulier*

$$f_{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \left( \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} \right) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}$$

On a également:

$$f_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}$$

Remarque: Comme mentionné précédemment on a  $u_0 = 1$ . De plus  $f_0 = 0$ .

**Théorème 5.** *La probabilité qu'il y ait un retour à l'origine jusqu'à l'instant  $2n$  compris est égale à la probabilité qu'il y ait un retour à l'instant  $2n$ :*

$$\mathbb{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = \mathbb{P}\{S_{2n} = 0\} = u_{2n}$$

*Par le fait que les  $S_i$  sont soit tous positifs, soit tous négatifs et ceci avec la même probabilité:*

$$\mathbb{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0\} = \frac{1}{2} \mathbb{P}\{S_{2n} = 0\} = \frac{1}{2} u_{2n}$$

### 2.3.3.2 Dernier retour à l'origine et loi de l'arcsinus

Intéressons-nous à présent à une situation similaire à la précédente, mais avec des résultats encore plus fascinants. C'est le moment venu de décrire la dernière visite à l'origine où on sera en présence de résultats qui vont certainement contre l'intuition de beaucoup d'entre nous.

Revenons à la loi des grands nombres. Notre intuition prend cette loi naturellement en compte quand confrontée à un jeu très, très long de pile ou face, mais l'interprète mal dans certains cas. Ce sera le cas pour les conclusions tirées à la fin de cette section. Notre intuition veut nous faire croire que si lors d'une partie de pile ou face il y a déjà eu plus de pile que de face alors il y aura une grande probabilité que, par la suite, le résultat face prédominera. Mais notre intuition nous piège. Comme déjà fait auparavant, nous allons laisser tendre le nombre de lancers vers l'infini. Présentons donc la réflexion. On a un jeu de pile ou face avec une infinité de lancers. Le nombre de pile sera-t'il le même que le nombre de face?

Intéressons-nous à la proportion de temps durant lequel le joueur est gagnant (respectivement perdant) lors de l'exemple du jeu de pile ou face. On ira donc déterminer la proportion de temps que la ligne brisée sera au-dessus (respectivement en-dessous) de l'axe du temps. On s'attend à ce que le joueur et la banque soient en tête-à-tête assez souvent puisque le jeu est parfaitement symétrique. C'est-à-dire, on s'attend à obtenir, dans un jeu, le même nombre de pile que de face. Contre-intuitivement, le résultat ne sera pas ce dernier, il n'y aura pas d'équilibre à long terme entre le nombre de pile et le nombre de face! On étudiera les tendances des marches aléatoires à rester du même côté de l'axe des abscisses pour un nombre de pas qui tend vers l'infini.

On se posera aussi la question de savoir si ces résultats vont ou pas varier avec un changement du nombre de pas de la marche aléatoire. La durée du jeu de pile ou face influencera-t-elle à long terme l'égalité des chances des joueurs?

**Théorème 6** (Distribution discrète de l'arcsinus). *La probabilité que jusqu'à un instant  $2n$  inclus le dernier retour à l'origine arrive à l'instant  $2k \leq 2n$ , notée  $\alpha_{2k,2n}$  est donnée par*

$$\begin{aligned}\alpha_{2k,2n} &= \mathbb{P}\{S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} \\ &= u_{2k}u_{2n-2k}\end{aligned}$$

pour  $k = 0, 1, \dots, n$

*Proof.* Commençons par compter le nombre de chemins tel que

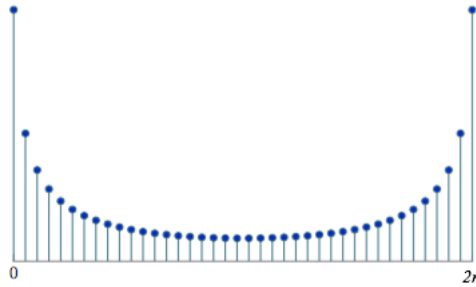
$$S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0$$

Les chemins jusqu'à l'instant  $2k$  inclus peuvent être choisis de  $2^{2k} u_{2k}$  façons différentes. Après l'instant  $2k$  les chemins peuvent être choisis de  $2^{2n-2k} u_{2n-2k}$  façons différentes. En divisant par  $2^{2n}$  on obtient le résultat cherché pour  $\alpha_{2k,2n}$ .  $\square$

Par le théorème précédent on peut réécrire  $\alpha_{2k,2n}$  ainsi

$$\alpha_{2k,2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$$

On peut représenter la distribution discrète de l'arcsinus graphiquement:



En analysant  $\alpha_{2k,2n}$  on retrouve le premier résultat qui semble contre-intuitif. La probabilité  $\alpha_{2k,2n}$  est plus grande proche de 0 ou  $n$ , et atteint son minimum en  $k = \frac{1}{2}$ . Ceci nous dit qu'une particule suivant une marche aléatoire passera par l'origine et ceci soit au début soit à la fin de la marche aléatoire. Ainsi, la particule n'a pas tendance à repasser par l'origine quand  $k$  est loin des valeurs 0 ou  $n$ . Ce résultat surprenant indique que, dans un jeu de pile ou face entre deux joueurs, une égalité entre leurs fortunes arrivera soit dans les premiers lancers, soit dans les derniers. Pendant le jeu, un des deux joueurs restera en tête beaucoup plus long temps que l'autre; en fait, il restera gagnant la plupart du temps.

Remarque: La distribution  $\alpha_{2k,2n}$  est symétrique par rapport à  $n$ , on a donc:

$$\alpha_{2k,2n} = \alpha_{2n-2k,2n}$$

Utilisons maintenant la formule pour l'approximation de Stirling, afin d'aboutir au point central de ce chapitre. La probabilité  $\alpha_{2k,2n}$  peut être approchée à l'aide de la formule pour l'approximation de Stirling. Rappelons quelques approximations résultantes des observations précédentes:

$$\mathbb{P}\{S_{2k} = 0\} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

et

$$\mathbb{P}\{S_{2n-2k} = 0\} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}}$$

Ainsi

$$\alpha_{2k,2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \simeq \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

On peut conclure pour une marche aléatoire de  $2n$  pas

$$\mathbb{P}\{u_{2n} = 2k\} \simeq \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

En notant

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

on obtient pour la distribution discrète de l'arcsinus

$$\alpha_{2k,2n} \simeq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Que se passe-t'il si nous laissons  $n$  tendre vers l'infini?

Considérons  $t \in [0, 1]$  et laissons  $n \rightarrow \infty$  pour que  $t$  devienne une variable continue. Intégrons  $f(t)$ , afin d'obtenir une nouvelle fonction que l'on notera  $F(t)$ .  $F(t)$  donnera la probabilité que le dernier retour à l'origine arrive avant le temps relatif  $\frac{k}{n}$

$$F(t) = \sum_{\frac{k}{n} \leq t} \alpha_{2k,2n} \simeq \sum_{\frac{k}{n} \leq t} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \simeq \int_0^t f(x) dx = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}$$

On a obtenu la *loi de l'arcsinus pour le dernier retour à l'origine* avant l'instant  $t$  qui donnera la probabilité que le dernier retour à l'origine ait lieu avant un certain temps.

*Exemple:* Dans un jeu de pile ou face au rythme d'un lancer par seconde et ceci pendant un an (donc  $2n = 31536000$ ), la probabilité que la dernière égalité entre deux joueurs soit dans les premiers 9 jours est égale à 0.1. La probabilité que la dernière égalité soit dans les deux premières heures et 10 minutes est égale à 0.01.

Représentation graphique de  $f(t)$  et  $F(t)$

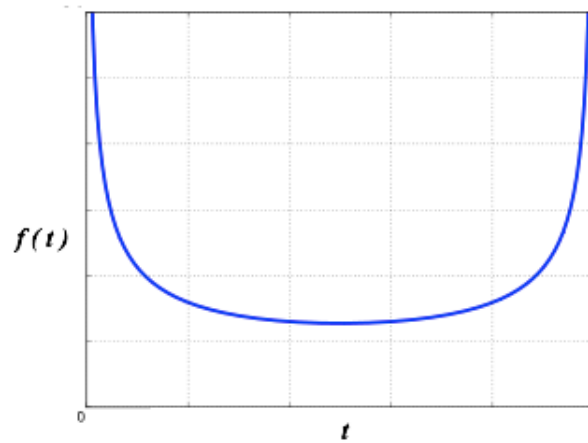


Figure 3 – Représentation graphique de  $f(t)$

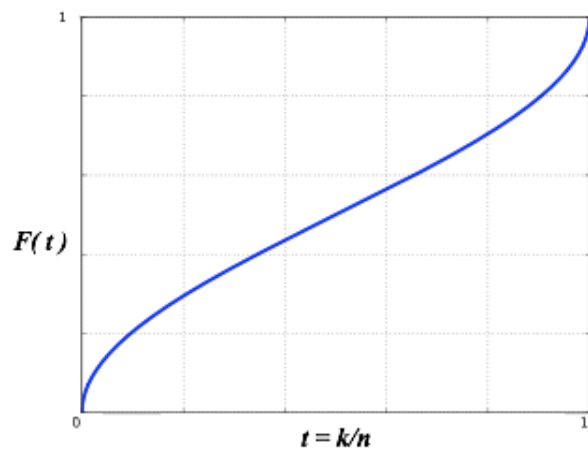


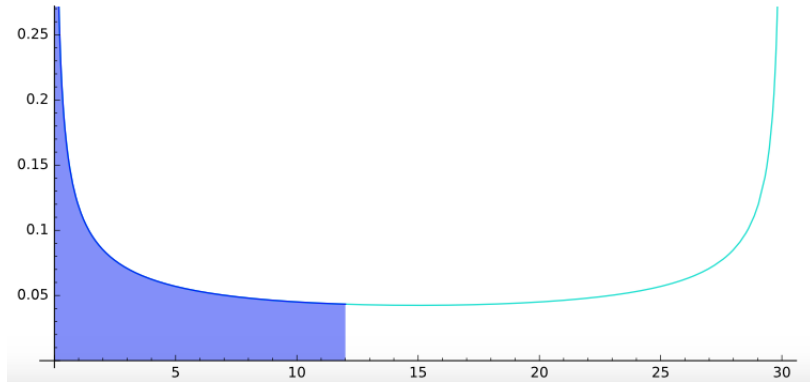
Figure 4 – Représentation graphique de  $F(t)$

Remarque: L'aire entre la courbe représentante de  $f(t)$  et l'axe du temps est égale à 1.



### Interprétation de $f(t)$ et $F(t)$ à l'aide d'un exemple

Prenons une marche aléatoire de 30 pas, c'est-à-dire  $n = 30$ . Choisissons l'intervalle  $I = [0, 12]$  et regardons la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans l'intervalle considéré.



L'aire bleu foncée visualisé sur la figure ci-dessus sous la courbe de  $f(t)$  et dans l'intervalle  $I$  donne la probabilité approximée que le dernier retour à l'origine soit avant le temps  $k = 12$ .

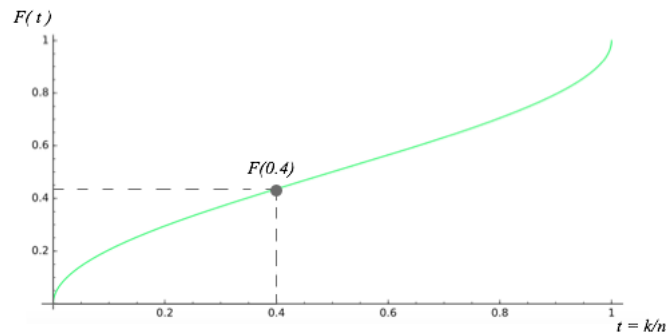
La valeur approximative de l'aire est donné par:

$$F(t) \simeq \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}$$

où  $t = \frac{k}{n}$ .

Comme  $n = 30$  et  $k = 12$  on a  $t = \frac{12}{30} = 0.4$ . Ainsi

$$F(0.4) \simeq \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{0.4} \simeq 0.4359$$



La probabilité que le dernier retour à l'origine soit avant le temps 12, dans une marche aléatoire de 30 pas, est d'environ 0.4359.

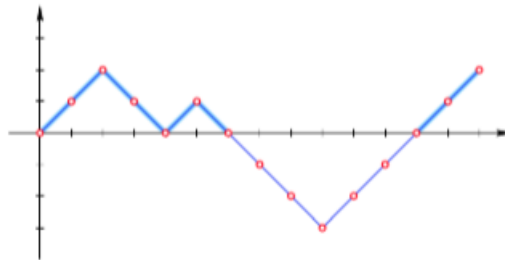
Remarque: Par symétrie, la probabilité que le dernier retour à l'origine soit avant le temps 12 est égal à la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans l'intervalle  $[18, 30]$ .

Notre prochaine étape consiste maintenant à étudier le temps que la marche aléatoire est, soit du côté positif, soit du côté négatif de l'axe des abscisses.

Considérons la variable aléatoire

$$P_{2n} = \#\{1 \leq N \leq 2n : \max(S_{n-1}, S_n) > 0\}$$

qui décrit l'évènement que la marche soit au-dessus de 0 pendant les  $2n$  premiers pas.



Énonçons un théorème qui répondra à la question sur quel intervalle de temps pendant  $2n$  premiers pas le joueur restera gagnant. En fait, la probabilité que, dans l'intervalle entre 0 et  $2n$ , la particule soit  $2k$  instants du côté positif de l'axe des temps et  $2n - 2k$  instants du côté négatif est égale à  $\alpha_{2k, 2n}$ . En effet, le temps au-dessus de 0 a la même distribution que la dernière égalité entre deux joueurs dans un jeu de pile ou face.

*Exemple:* Soit un jeu de pile ou face où un lancer est fait par seconde et ceci pendant un an. Ainsi

1. la probabilité qu'un des joueurs soit en tête pendant au moins 4 jours et demi est égal à 0.1
2. la probabilité qu'un des joueurs soit en tête pendant maximum 1 heure et 5 minutes est égal à 0.01

**Théorème 7** (Loi de l'arcsinus pour les temps de séjour). *Pour*  
 $n = 0, 1, \dots, k$ , on a

$$\mathbb{P}\{P_{2n} = 2k\} = \mathbb{P}\{S_{2k} = 0\}\mathbb{P}\{S_{2n-2k} = 0\} = u_{2k}u_{2n-2k}$$

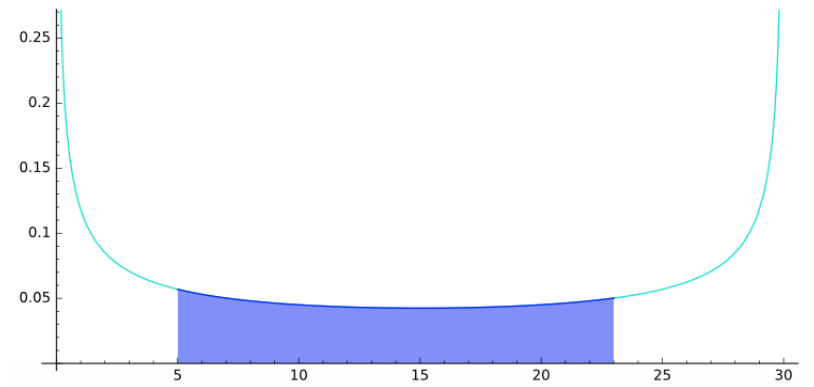
Notamment, pour tout  $0 \leq a < b \leq 1$

$$\mathbb{P}\{P_{2n} \cdot \frac{1}{2n} \in [a, b]\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{b} - \arcsin \sqrt{a}).$$

Remarque: Pour l'utilisation de la fonction  $F(t)$ , la variable  $t$  doit être sous la forme  $t = \frac{k}{n}$ . Ceci sera le cas pour les variables  $a$  et  $b$ .

Revenons à l'exemple précédent de la marche aléatoire avec 30 pas. Observons la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans l'intervalle  $[5, 23]$ .

Graphiquement:



Calculons la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans l'intervalle  $[5, 23]$ :

$$k_1 = 5 \text{ et } k_2 = 23$$

$$n = 30$$

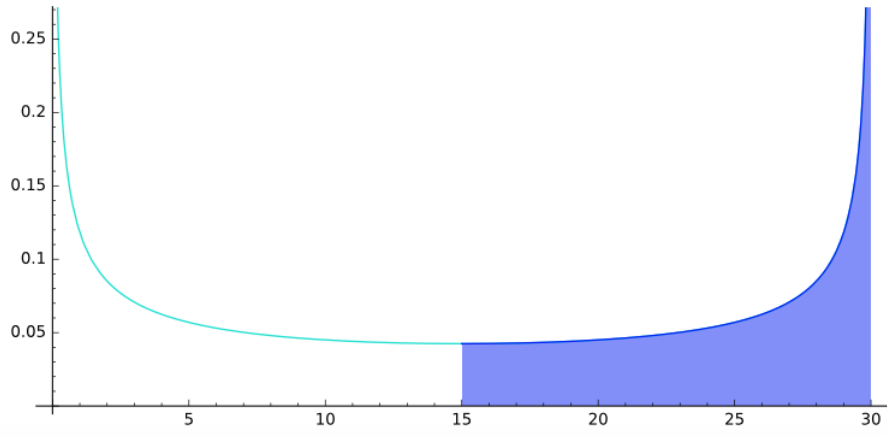
on obtient

$$a = \frac{5}{30} \text{ et } b = \frac{23}{30}$$

Par le théorème précédent, la probabilité est égale à:

$$\frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{\frac{23}{30}} - \arcsin \sqrt{\frac{5}{30}}) \simeq 0.4113$$

Regardons un dernier exemple assez intéressant: la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans la deuxième partie, donc dans l'intervalle  $[15, 30]$  de la marche aléatoire est égale à 50%!



Vérifions ce résultat à l'aide du théorème précédent:

$$k_3 = 15 \text{ et } k_4 = 30$$

$$n = 30$$

on obtient

$$a = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{30}{30} = 1$$

Par le théorème précédent, la probabilité est égale à:

$$\frac{2}{\pi} \left( \arcsin \sqrt{1} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = 0.5$$

Ce résultat, comme tous les résultats que l'on a pu étudier sur la loi de l'arcsinus, est indépendant du nombre de pas de la marche aléatoire considérée! Effectivement, le dernier exemple qui a pu montrer que, pour une marche aléatoire, la probabilité qu'il n'y ait pas de retour à l'origine pendant la deuxième moitié de la marche aléatoire est égal à 50%, révèle que cette probabilité est bien la même quel que soit le nombre de pas de la marche.

### 2.3.4 Retours à un point quelconque

On a pu voir les résultats pour un premier retour en 0. Mais est-il vrai que pour une marche aléatoire où on laisse tendre le nombre de pas vers l'infini, tous les entiers seront atteints? Si oui, combien de fois? Et quelle est la probabilité qu'un entier quelconque soit atteint?

Le résultat suivant est une conséquence du caractère markovien des marches aléatoires. En effet, on pourra observer qu'il y aura une infinité de retours pour chaque entier. Commençons par observer ce résultat pour le retour en 0.

**Théorème 8.** *La probabilité que la marche aléatoire revienne à 0 est égale à 1, autrement dit*

$$\mathbb{P}\{T_0 < +\infty\} = 1.$$

*Proof.* Soit  $m \in \mathbb{Z}$ . On a que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{T_0 < +\infty\} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{T_0 = 2k\} \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbb{P}\{S_{2k-2} = 0\} - \mathbb{P}\{S_{2k} = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{S_0 = 0\} - \mathbb{P}\{S_{2m} = 0\} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \end{aligned}$$

Par la formule de Stirling pour  $m \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

Ainsi quand  $m \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \rightarrow 0$$

En passant à la limite dans l'égalité

$$\sum_{k=1}^m \mathbb{P}\{T_0 = 2k\} = 1 - \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}$$

On obtient:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{T_0 = 2k\} = 1$$

La probabilité que la marche aléatoire revienne en 0 est bien égale à 1.  $\square$

Après chaque pas, la marche aléatoire se comporte comme une nouvelle marche aléatoire partant du pas actuel, autrement dit, la marche "oublie" d'où elle est venue", elle "oublie" le pas antérieur. À chaque fois que la marche aléatoire retourne au point 0, la probabilité de revenir au point 0 est la même qu'avant le retour considéré.

Soit  $\alpha$  un entier. Notons l'instant de premier retour en  $\alpha$ :

$$T_\alpha = \begin{cases} \inf \{n \geq 1, S_n = \alpha\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque: Comme vu précédemment, l'instant considéré pour un retour à un entier devra être pair.

**Théorème 9.** *Tout entier est visité une infinité de fois.*

Avant de faire la démonstration présentons le lemme suivant:

**Lemme.** *La marche aléatoire prendra presque sûrement des valeurs arbitrairement grandes, respectivement infiniment petites.*

$$\mathbb{P}\{\sup S_n = +\infty\} = \mathbb{P}\{\inf S_n = -\infty\} = 1.$$

Démontrons le théorème 9.

*Proof.* Soit  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Supposons que  $\alpha$  est visité un nombre fini de fois. Alors

$$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : S_n \neq \alpha.$$

Ceci implique qu'après le  $n_0$ -ième pas

- si  $\alpha$  est du côté positif, alors les valeurs de la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  le sont aussi
- si  $\alpha$  est du côté négatif, alors les valeurs de la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  le sont aussi

Suivant ce raisonnement, il n'existe pas deux entiers  $n_1 < n_2$  tel que

$$S_{n_1} < \alpha \text{ et } S_{n_2} > \alpha$$

Il faudrait donc passer obligatoirement par la valeur  $\alpha$ .

Supposons que  $\forall n \geq n_0 : S_n > a$ . Dans ce cas, la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par

$$\min(S_0, S_1, \dots, S_{n_0}, a)$$

Mais par le dernier lemme  $\inf S_n = -\infty$

Par analogie la suite serait majorée et contredirait  $\max S_n = +\infty$ .

Par contraposée si

$$\sup S_n = +\infty \text{ et } \inf S_n = -\infty$$

la suite visite  $\alpha$  une infinité de fois et ceci avec une probabilité de 1.  $\square$

### 3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

#### 3.1 La marche aléatoire en dimensions supérieures

Après une étude exhaustive des marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$ , considérons maintenant une généralisation des marches aléatoires à des dimensions supérieures. Étudions maintenant brièvement les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 1$ . Avec l'objectif de généraliser les marches aléatoires sur des dimensions supérieures, nous allons étudier brièvement le comportement d'une particule sur les marches aléatoires de dimension 2 et sur les marches aléatoires de dimension 3, en particulier son comportement au niveau du retour à l'origine. Le retour à l'origine dépendra surtout de la dimension dans laquelle la particule se déplace laquelle on notera  $d$  tel que  $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

**Définition 3 : Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 1$**  Soit  $d \geq 1$  et soit  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$ . Soit  $(X_n)$  une suite infinie de variables aléatoires  $X_n$  indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans l'ensemble fini  $\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d\}$  tel que  $\forall k \in \{1, \dots, d\}$ :

$$\mathbb{P}\{X_k = +e_k\} = \mathbb{P}\{X_k = -e_k\} = \frac{1}{2d}$$

La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  est la suite  $(S_n)$  de variables aléatoires tel que:

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1 \end{cases}$$

Nous avons donc une généralisation de la définition de marche aléatoire en dimension 1 pour des dimension supérieures. En effet, les résultats observés pour la dimension 1, sont vérifiés avec la définition ci-dessus. Comparons brièvement la définition ci-dessus avec la définition donnée initialement pour les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$ .

Pour  $d = 1$ ,  $S_n$  est la position au temps  $n$  de la particule considéré dans  $\mathbb{Z}$ . La probabilité que la particule "monte" ou "descende" est égale à  $\frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ .

Nous allons observer le cas  $d = 2$  et  $d = 3$  par la suite.

Continuons ensuite avec un théorème du célèbre mathématicien Kolmogorov qui affirme qu'une marche aléatoire est ou bien *transiente* ou bien *récurrente*. Mais que veulent dire ces deux notions *transiente* et *récurrente*?



**Définition 4 : Marche aléatoire récurrente et marche aléatoire transiente** Une marche aléatoire est dite *récurrente* si la probabilité que la particule retourne infiniment souvent à l'origine est égale à 1, et est dite *transiente* (ou *transitoire*) si la probabilité que la particule retourne infiniment souvent à l'origine est inférieure à 1.

Remarque: Une marche aléatoire est soit *récurrente* soit *transiente*.

Mais dans quelles dimensions la marche aléatoire est-elle récurrente et dans quelles est-elle transitoire ?

Soit  $d$  la dimension de la marche aléatoire comme définie auparavant.

Grâce aux résultats précédents sur le cas de la marche aléatoire à une dimension, on sait que si  $d = 1$  la marche sera nécessairement récurrente, puisque dans ce cas la probabilité de retourner infiniment souvent à un point quelconque est égale à 1. Ce résultat fait partie du théorème suivant énoncé par George Polya en 1921 :

**Théorème 10.** Théorème de Polya: *On considère une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ . Si  $d < 3$  la marche aléatoire est récurrente. Si  $d \geq 3$  la marche aléatoire est transiente.*

C'est-à-dire qu'une marche aléatoire sur le plan sera toujours récurrente, tandis qu'une marche aléatoire sur l'espace sera transiente.

## 3.2 Marche aléatoire à 2 dimensions

### 3.2.1 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$

Dans une marche aléatoire à 1 dimension, la particule a deux mouvements possibles : en avant et en arrière. Dans le cas du jeu de pile ou face ces mouvements représentent les résultats pile ou face.

Considérons maintenant une marche aléatoire à 2 dimensions. Dans ce cas, la particule aura 4 mouvements possibles : en avant et en arrière (comme en dimension 1) et à droite et à gauche.

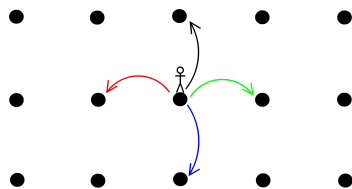


Figure 5 – Représentation informelle d'une marche aléatoire d'un pas en dimension 2

On remarque que la probabilité pour chaque mouvement possible  $m_k$  pour  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  ( $m_1$  monter,  $m_2$  descendre,  $m_3$  à droite,  $m_4$  à gauche) est égale à

$$\mathbb{P}\{X_i = m_k\} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Effectivement, une particule qui se déplace en dimension 2 et qui à l'instant  $N$  se situe au point  $(a, b)$  peut:

- monter, donc arriver au point  $(a, b + 1)$
- descendre, donc arriver au point  $(a, b - 1)$
- se déplacer vers la droite, donc arriver au point  $(a + 1, b)$
- se déplacer vers la gauche, donc arriver au point  $(a - 1, b)$

Chaque déplacement ayant donc une probabilité de  $\frac{1}{4}$ .

Comme en dimension 1, la distance attendue après  $n$  pas sera dans l'ordre de  $\sqrt{n}$ .

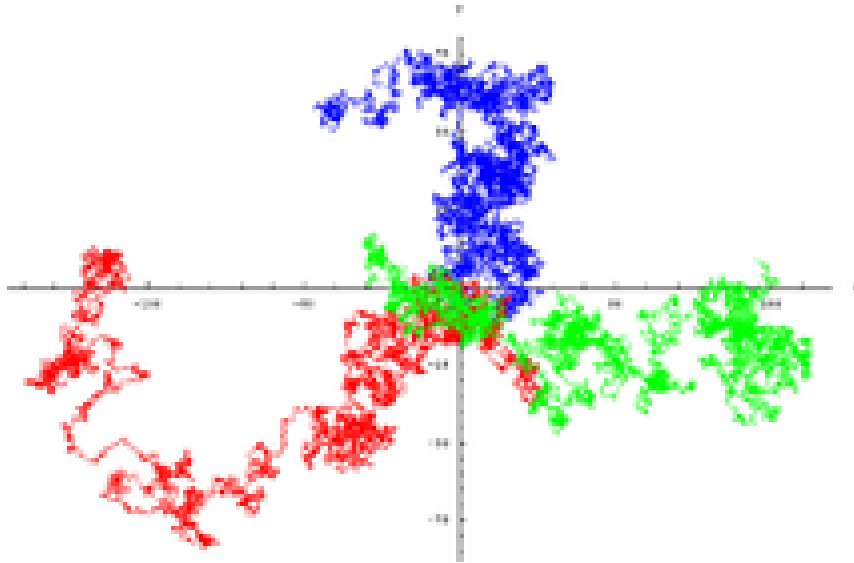


Figure 6 – Trois marches aléatoires de 10000 pas en dimension 2

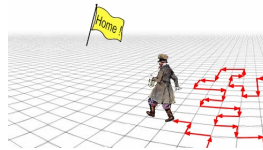
### 3.2.2 Interprétation: le chemin de l'ivrogne

La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  est souvent aussi appelée *chemin de l'ivrogne*.

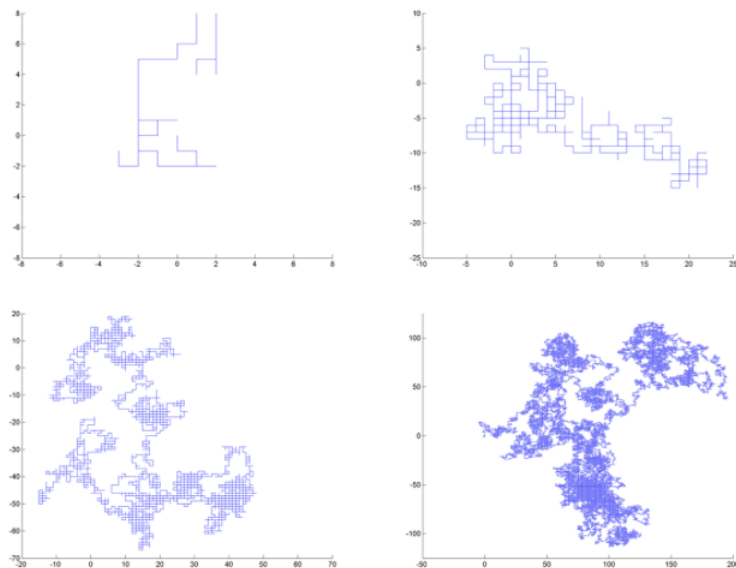
Considérons l'exemple suivant: Matthias, un habitant de la ville de Manhattan (New York, États-Unis) a un jour bu un peu plus que d'habitude dû à des circonstances festives dans un bar situé dans la même ville. Après avoir fini tous ces verres, il veut rentrer chez lui.

Malheureusement, Matthias a tellement bu, qu'il a oublié le chemin pour rentrer chez lui. Or, la ville de Manhattan vue d'en haut ressemble à un quadrillage formé par des longues, très longues rues. En essayant de rentrer chez lui, Matthias s'arrête à chaque croisement et repart aléatoirement dans une des quatre directions possibles sans se rappeler de quelle direction il venait. Ici on considère que la distance entre chaque croisement représente un pas dans une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$  faite par notre marcheur ivre.

On peut également considérer l'exemple où chaque pas du marcheur ivre est l'unité de la marche aléatoire. On peut ainsi considérer le marcheur sur une très grande plaine à deux dimensions.



Voici le chemin possible du marcheur après 50, 500, 5000 et 50000 pas:



Cet exemple, déjà évoqué dans l'introduction du document, sera clarifié à l'aide de l'étude du chapitre sur le mouvement Brownien.

Comme le déplacement du marcheur ressemble au mouvement d'une particule suivant une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$ , donc une marche aléatoire récurrente, le marcheur reviendra certainement au bar et/ou arrivera aussi à retrouver sa maison.

L'expression

"Tous les chemins mènent à Rome"

est souvent associé (en rigolant) à la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^2$ !

Petite remarque à ne pas trop prendre au sérieux: Il faudrait peut-être adapter l'expression à la suivante:

"Tous les chemins mènent à Manhattan!"

### 3.2.3 Distribution gaussienne

La position finale d'une particule lors d'une marche aléatoire avec un très grand nombre de pas suit asymptotiquement une distribution gaussienne.

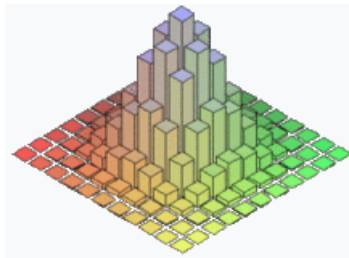


Figure 7 – Répartition des probabilités après 10 pas

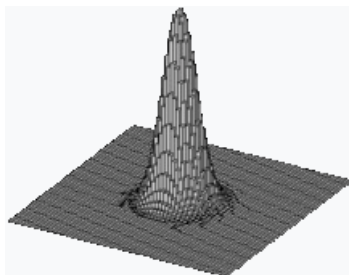


Figure 8 – Répartition des probabilités après 60 pas

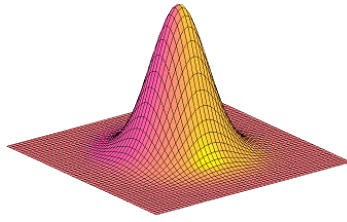


Figure 9 – Distribution gaussienne

En revenant à l'exemple du marcheur ivre, on peut parfaitement comprendre cette distribution gaussienne à l'aide des figures ci-dessous.

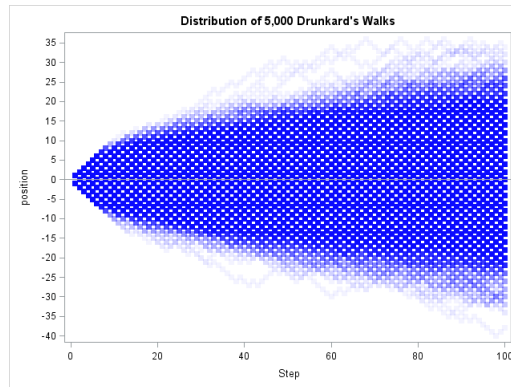


Figure 10 – 5000 marches aléatoires différentes d'un marcheur ivre pour 100 pas

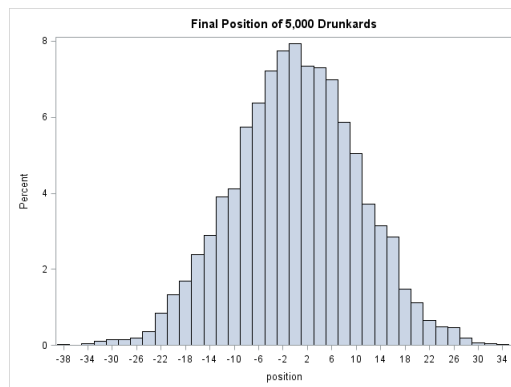


Figure 11 – Distribution gaussienne des positions finales associées aux 5000 marches aléatoires

### 3.3 Marche aléatoire à 3 dimensions

#### 3.3.1 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^3$

Considérons maintenant une marche aléatoire à 3 dimensions avec  $n$  pas. Dans ce cas, la particule aura 6 mouvements possibles : en avant, en arrière, à droite et à gauche (comme en dimension 2) et en haut et en bas.

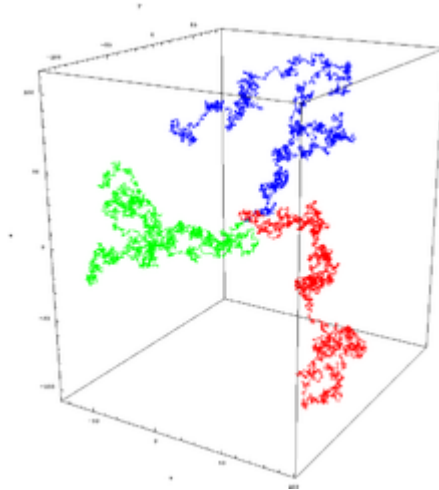


Figure 12 – Trois marches aléatoires de 10000 pas en dimension 3

On remarque que la probabilité pour chaque mouvement possible  $m_k$  pour  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  est égale à

$$\mathbb{P}\{X_i = m_k\} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

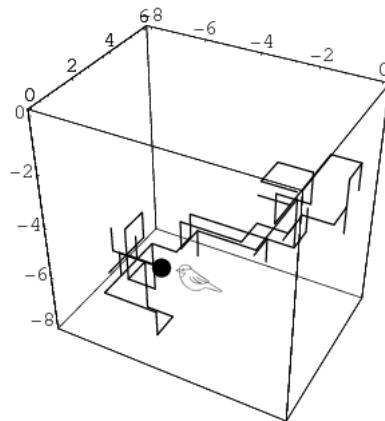
pour  $i \in 1, \dots, n$

La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^3$  est transiente. Une marche aléatoire en dimension 3 a une probabilité inférieure à 1 quand le nombre de pas de la marche tend vers l'infini. En effet, la probabilité d'avoir un retour à l'origine est d'approximativement

$$0.3405 < 1$$

### 3.3.2 Interprétation: le vol d'un oiseau

La marche aléatoire en 3 dimensions peut être interprétée comme le vol d'un oiseau dans l'espace.



### 3.4 Quelques applications des marches aléatoires

Les marches aléatoires sont un précieux outil, et pas seulement dans le domaine des mathématiques. En effet, les marches aléatoires sont utilisées en physique, économie, médecine, biologie, génétique, psychologie, etc.

Un exemple concret est l'étude des populations dans le domaine de la génétique. En effet, les marches aléatoires permettent de décrire les propriétés statistiques de la dérive génétique.

Un exemple du quotidien sur les marches aléatoires est dans le monde des réseaux sociaux. *Twitter* utilise les marches aléatoires dans l'algorithme qui suggère aux utilisateurs des profils à suivre.

Il faut également mentionner que les marches aléatoires peuvent aider la compréhension des tendances boursières.

La marche aléatoire permet donc la compréhension de certains phénomènes du quotidien, informatiques et certains phénomènes naturels. L'exemple le plus important des marches aléatoires est le *mouvement Brownien*. Celui-ci sera traité et analysé en détail dans le chapitre suivant.

## 4 Le mouvement Brownien

### 4.1 Côté historique et intérêt

Le mouvement Brownien, dont l'adjectif fait référence au célèbre naturaliste (ou plutôt botaniste) écossais **Robert Brown** du XIX<sup>ème</sup> siècle, est un phénomène naturel qui a suscité beaucoup d'attention de la part des scientifiques et surtout éveillé leur désir de comprendre l'origine de ce mouvement depuis sa découverte et sa description précise par Robert Brown.

Ce dernier a en effet vraiment découvert l'existence du mouvement Brownien en 1827. Il a fait cette découverte en analysant au microscope le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen d'une plante appelée, en latin, *Clarkia pulchella*. Brown a constaté que les particules se trouvant dans ce fluide se déplaçaient dans n'importe quelle direction qui pouvaient changer d'un moment à l'autre. Le naturaliste écossais a alors qualifié ce mouvement de chaotique, ceci étant la description la plus courante du mouvement Brownien.

Après sa découverte, l'existence du mouvement Brownien a toutefois été remise en question pendant plus d'un siècle jusqu'à récemment, en 1990. Cette année-là, un scientifique britannique nommé *Brian Ford* a réalisé la même expérience que Brown dans les conditions les plus similaires possibles et avec le matériel identique à celui utilisé par ce dernier à l'époque. Ford a alors observé le même phénomène que Brown et a donc décrit le mouvement Brownien de la même façon que Brown, mettant ainsi fin au scepticisme de certains scientifiques à l'égard du mouvement Brownien.

Le mouvement Brownien, dont la spécificité est le déplacement chaotique dans n'importe quelle direction et donc intuitivement imprévisible pour l'humain, a particulièrement attiré l'attention des mathématiciens essentiellement durant tout le XX<sup>ème</sup> siècle. Parmi tous ces mathématiciens, citons les plus intéressants et importants :

1. *Louis Bachelier* est le premier mathématicien de l'histoire à avoir proposé un modèle mathématique du mouvement Brownien (1901). Il a en outre vu l'utilité de ce phénomène dans le domaine de la finance et y a donc appliqué son modèle.
2. *Albert Einstein* est parvenu en 1905 à décrire quantitativement le mouvement brownien. De plus, il a précisé qu'il est possible de déterminer la dimension moléculaire du mouvement Brownien et ce en donnant le procédé.



3. *Jean Perrin*, après avoir relu le travail d'Einstein mentionné ci-dessus, a pris l'initiative de réaliser cette expérience en suivant le procédé d'Einstein à la lettre. À l'issue de cette expérience, Perrin est parvenu à déterminer la valeur du nombre d'Avogadro, nombre particulièrement important en chimie. Il a, de plus, étudié les trajectoires des particules animées du mouvement chaotique. Perrin a observé du point de vue mathématique que ces trajectoires ont la particularité de n'avoir aucune tangente en un point quelconque de la trajectoire et ce du fait de leur irrégularité. Tous ces résultats lui ont permis de remporter, 17 ans plus tard, un prix Nobel.
4. *Norbert Wiener*, grâce aux avancées de Perrin concernant le mouvement Brownien, est le premier mathématicien à donner une définition mathématique de ce mouvement (1923). En outre, il s'intéresse essentiellement au mouvement chaotique du point de vue mathématique. Wiener étudie la continuité et la non-dérivabilité des trajectoires de ce mouvement. Il définit également une sorte d'intégrale qui porte son nom, à savoir l'intégrale de Wiener. D'ailleurs, le mouvement Brownien est parfois appelé processus de Wiener.

En gros, l'on constate que la découverte du mouvement Brownien a eu un impact non seulement sur la chimie d'où tout a commencé, mais aussi sur beaucoup d'autres domaines comme les mathématiques et la finance.

## 4.2 Construction mathématique

Avant de commencer à décrire les étapes de la construction du mouvement Brownien au moyen des mathématiques, il faut savoir qu'il n'y a pas qu'une seule méthode de construction, mais plusieurs voies de constructions mathématiques de ce mouvement. Citons-en quelques-unes : Le processus stochastique, Théorème de Consistance de Kolmogorov, Théorème de Donsker, etc. Puisque ce document est centré sur les marches aléatoires, nous allons par la suite traiter uniquement la méthode de construction qui fait intervenir la marche aléatoire: la construction donnée à l'aide du théorème de Donsker.

Mais avant d'en arriver là, nous allons d'abord définir le mouvement brownien qui utilise le processus stochastique.

**Définition 5** (Mouvement brownien uni-dimensionnel)

Le mouvement brownien unidimensionnel  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique dépendant du temps  $t$  et vérifiant :

1. (accroissements indépendants) Quels que soient les temps  $t$  et  $s$  tels que  $t > s$ , l'accroissement  $B_t - B_s$  est indépendant du processus  $(B_u)_{0 \leq u \leq s}$  avant le temps  $s$ .
2. (accroissements stationnaires et gaussiens) Quels que soient les temps  $t$  et  $s$  tels que  $t > s$ , l'accroissement  $B_t - B_s$  est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance  $ts$ .
3.  $(B_t)_{t \geq 0}$  est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour presque toute réalisation, la fonction  $t \mapsto B_t(\omega)$  est continue.
4. Il est souvent supposé que  $B_0 = 0$ . On dit alors que le mouvement brownien est **standard**.

**Définition 6** (Mouvement brownien multi-dimensionnel)

Le mouvement brownien d-dimensionnel est un processus

$(B_t)_{t \geq 0} := (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$  où les processus  $B^1, B^2, \dots, B^d$  sont des mouvements browniens indépendants.

Autrement dit le mouvement brownien d-dimensionnel est à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et ses projections sur les espaces  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^{d-1}$  sont respectivement des mouvements browniens uni-, bi-, ..., d-1-dimensionnels.

Énonçons à présent le fameux théorème de Donsker, qui a été établi par Donsker en 1951.

**Théorème 11.** Soit  $(U_n, n \geq 1)$  une suite indépendante et identiquement distribuée de variables aléatoires centrées, de carré intégrable et de variance  $\sigma^2$ . On interpole la marche aléatoire  $\sum_{k=1}^n U_k$  de manière affine par morceaux en considérant le processus  $(X_n(t), t \geq 0)$  défini par

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(n)}} \left( \sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{([nt] + 1)} \right)$$

pour  $t \in [0, 1]$  et où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . Considérons l'espace  $\mathcal{C}([0, 1])$  des fonctions à valeurs réelles et continues sur  $[0, 1]$ . On munit  $\mathcal{C}([0, 1])$  de la tribu borélienne  $\mathcal{B}$  et de la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ . Ainsi,  $X_n$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{B})$ .

La suite  $(X_n, n \geq 1)$  converge en loi vers un mouvement Brownien standard  $B = (B_t, t \geq 0)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Ici  $B$  est vu comme un élément aléatoire de  $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{B})$ .

En ce qui concerne la preuve du thème de Donsker, nous allons seulement faire un schéma de la preuve.

*Proof.* Notons  $X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} U_k + \psi_{n,t}$ . En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on montre que  $\psi_{n,t}$  converge en probabilité vers 0.

Ainsi par le théorème central limite,  $X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} \sqrt{t}N$  (converge en loi) où  $N$  est une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

De manière similaire, on obtient successivement :

$$(X_n(s), X_n(t) - X_n(s)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} (B_s, B_{t-s})$$

$$(X_n(s), X_n(t)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} (B_s, B_s + B_{t-s})$$

$$(X_n(t_1), X_n(t_2), \dots, X_n(t_k)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})$$

où  $B$  est un mouvement Brownien standard.

Reste à montrer que la suite  $(X_n, n \geq 1)$  est tendue. Pour cela, on montre que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^2 \max_{k \leq n} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k U_i \geq \lambda\sigma\sqrt{(n)}) = 0$

On démontre d'abord cette convergence pour le cas où les variables  $U_i$  sont normales. Pour généraliser à une loi quelconque, on utilise le théorème central limite et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour affiner les majorations.

□

## 5 Étude informatique de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ , de la loi arcsinus et du mouvement Brownien

L'étude informatique de ce projet à été faite sur le programme *Sage*. Cette étude est divisée en deux parties:

1. L'étude informatique de la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  et de la loi arcsinus
2. L'étude informatique du mouvement Brownien

Les deux études sont commentées sur ce document, mais aussi sur les programmes sur *Sage*.

Comme le programme sur l'étude informatique de la marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$  et de la loi arcsinus est plus exhaustif, les commandes, paramètres et fonctions seront explicitement décrites dans la section respective.

Les programmes sur *Sage* se trouvent dans les documents intitulés

- Marche aléatoire et loi de l'arc sinus
- Mouvement Brownien

### 5.1 Étude informatique de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ et de la loi arcsinus

#### 5.1.1 Description du programme sur *Sage*

Décrivons les composantes, les paramètres et les fonctions utilisés sur le code *Sage* pour les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$  et la loi arcsinus.

**set1**: un ensemble avec les éléments  $-1$  et  $1$

**n**: variable pour le nombre de pas de la marche aléatoire

**X[n]**: variables aléatoires  $X_n$  dépendantes de la variable  $n$  (même définition que dans la section 2.1)

**S[n]**: variables aléatoires  $S_n$  dépendantes de la variable  $n$  (même définition que dans la section 2.1)

**Rep(n)**: fonction qui donne la représentation de la marche aléatoire dans un repère

**Np**: nombre de fois tel que  $X_i = +1$

**Nq**: nombre de fois tel que  $X_i = -1$

**p**: probabilité d'avoir  $X_i = +1$  dans  $n$  pas

**q**: probabilité d'avoir  $X_i = -1$  dans  $n$  pas

**cp**: nombre de chemins possibles pour  $n$  pas

**zeros(S)**: fonction dépendante de  $S$  qui indique les instants des retours à l'origine

**len(zeros(S))**: nombre de retours à l'origine dans  $n$  pas

**ReturnToPoint(Point, start, end)**: fonction dépendante des variables 'Point', 'start' et 'end'. La fonction donne les instants du retour à une certaine abscisse ('Point') dans un intervalle d'abscisses choisi (entre 'start' et 'end')

**GreaterThanPoint(Point, start, end)**: fonction dépendante des mêmes variables que la fonction **ReturnToPoint**, qui indique les pas où  $S_n$  est supérieur ou égal à un point choisi dans un intervalle choisi

**LessThanPoint(Point, start, end)**: fonction dépendante des mêmes variables que la fonction **ReturnToPoint**, qui indique les pas où  $S_n$  est inférieur ou égal à un point choisi dans un intervalle choisi

**TimeGreaterThanPoint(Point)**: fonction dépendante de la variable 'Point' (même variable que dans **ReturnToPoint**) qui indique le nombre de pas tel que  $S_n$  est supérieur à un point choisi

**TimeLessThanPoint(Point)**: fonction dépendante de la variable 'Point' (même variable que dans **ReturnToPoint**) qui indique le nombre de pas tel que  $S_n$  est inférieur à un point choisi

**pG(Svalue)**: fonction dépendante de la variable Svalue (un point d'ordonnée  $S_n$ ) qui donne la probabilité que la marche soit au-dessus de ce point

**pL(Svalue)**: fonction dépendante de la variable Svalue (un point d'ordonnée  $S_n$ ) qui donne la probabilité que la marche soit en-dessous de ce point

**pRTP(Svalue)**: fonction dépendante de la variable Svalue (un point d'ordonnée  $S_n$ ) qui donne la probabilité d'avoir un retour au point Svalue

**Npaths(N,r)**: fonction dépendante des variables  $N$  et  $r$ , qui donne le nombre de chemins entre l'origine  $(0;0)$  et le point d'abscisse  $N$  et d'ordonnée  $r$

**pNpaths(N,r)**: fonction dépendante des variables  $N$  et  $r$ , qui donne la probabilité que le chemin passe par le point  $(N,r)$  dans  $n$  pas

**pRTO(N)**: fonction dépendante de la variable  $N$ , qui donne la probabilité réelle d'avoir un retour à l'origine avant le temps  $N$

**pRTOSTirling(N)**: fonction dépendante de la variable  $N$  qui donne l'approximation (par la formule de Stirling) de la probabilité d'avoir un retour à l'origine dans une marche aléatoire avant le pas  $N$

**pRTOerror(N)**: fonction dépendante de la variable  $N$ , qui donne l'écart entre la probabilité réelle d'avoir un retour à l'origine avant le temps  $N$  et la probabilité approximé par la formule de Stirling

**pFRTO(N)**: fonction dépendante de la variable  $N$ , qui donne la probabilité que le premier retour à l'origine soit avant le temps  $N$

**pLRTO(k,N)**: fonction dépendante des variables  $k$  et  $N$ , qui donne la probabilité que le dernier retour à l'origine soit au pas  $k$  avant  $N$  ou au pas  $N$

**pLRTOstirling(k,N)**: fonction dépendante des variables  $k$  et  $N$ , qui donne la probabilité approximé (par la formule de Stirling) que le dernier retour à l'origine soit au pas  $k$  avant  $N$  ou au pas  $N$

**pLRTOerror(k,N)**: fonction dépendante des variables  $k$  et  $N$ , qui donne l'écart entre la probabilité réelle et la probabilité approximé (par la formule de Stirling) que le dernier retour soit au pas  $k$  avant  $N$  ou au temps  $N$

**f(x)**: fonction dépendante de la variable  $x$  qui donne:

$$\frac{1}{\pi \cdot \sqrt{x \cdot (1-x)}}$$

**alphbAppr(x,n)**: fonction qui dépend des variables  $x$  et  $n$  qui donne:

$$\frac{1}{\binom{n}{2} \cdot f\left(\frac{x}{n}\right)}$$

**alphb(x)**: fonction qui dépend de la variable  $x$  et qui rend la fonction **alphbAppr(x,n)**

**pl=plot(alphb,(0,n),ymax=8/n,color='turquoise')**: commande qui donne la représentation graphique de la fonction **alphb** entre 0 et  $n$  dans un intervalle d'ordonnées entre 0 et  $\frac{8}{n}$

**pl+= plot(alphb,(6,8),ymax=8/n,fill=True,fillcolor='blue')**: commande qui permet d'afficher l'intervalle d'abscisses choisi (dans ce cas entre 6 et 8) entre la courbe représentant  $f(x)$  et l'axe des abscisses

**Approx(t)**: fonction qui dépend de la variable  $t$  qui donne la fonction:

$$\frac{2 \cdot \arcsin(\sqrt{t})}{\pi}$$

La représentation graphique est donnée par **plot(Approx,(0,1),color='lime')**

**Area(a,b)**: fonction qui dépend des variables  $a$  et  $b$  qui donne la représentation graphique de **alphb** et de l'intervalle d'abscisses  $(a; b)$  et entre la courbe représentant la fonction **alphb** et l'axe des abscisses.

**prob(a,b)**: fonction dépendante des variables  $a$  et  $b$  qui donne la probabilité entre  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans l'intervalle  $[a, b]$

**Everything(a,b)**: fonction qui dépend des variables  $a$  et  $b$  qui donne la représentation graphique de **Area(a, b)**, la probabilité **prob(a, b)** et la valeur approchée de **prob(a, b)**

### 5.1.2 Quelques extraits du programme

En choisissant un  $n \in \mathbb{N}^*$  le programme retourne les informations les plus importantes dans l'étude des marches aléatoires symétriques sur  $\mathbb{Z}$  et sur la loi arcsinus, déjà décrites précédemment.

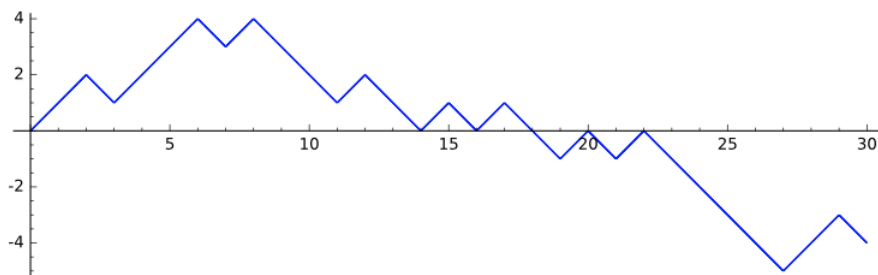
Afin de pouvoir observer tous les résultats, y inclus les résultats sur les retours à l'origine, il est conseillé de choisir un  $n$  pair.

Regardons quelques résultats extraits du programme sur *Sage* pour  $n = 30$ . Le programme nous donne une séquence de  $-1$  et  $+1$  qui commence avec 0:

```
[0, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1]
```

et nous fournit la marche aléatoire et sa représentation; or, la fonction donne la position de la particule à chaque instant (l'origine étant la première position), *id est*, la fortune du joueur lors du jeu pile ou face à la fin de chaque lancer:

```
[0, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -4, -3, -4]
```



Avec les commandes **Np**, **Nq**, **p**, **q**, **cp** on obtient le nombre de fois où  $X_i = +1$ , où  $X_i = -1$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , les probabilités  $\mathbb{P}\{X_i = +1\}$  et

$\mathbb{P}\{X_i = -1\}$ , le nombre de chemins différents possibles pour 30 pas, c'est-à-dire  $2^{30}$ :

```

Nombre de +1 (de pile)
13
Nombre de -1 (de face)
17
Probabilité de +1 (de pile)
13/30
Probabilité de -1 (de face)
17/30
Nombre de chemins possibles
1073741824

```

La fonction **S[n]** rend  $S_n$  pour un  $n$  choisi. Ici pour  $n = 10$ :

```

S[10]
2

```

Avec la fonction **zeros(S)**, le programme rend les retours à l'origine et, en utilisant **len(zeros(S))** le nombre de retours à l'origine dans les 30 pas de la marche aléatoire:

```

zeros(S)
Retours à l origine
[0, 14, 16, 18, 20, 22]

```

```

len(zeros(S))
Nombre de retours à l origine
6

```

Il est possible de demander le temps où  $S_n$  est supérieur ou égale à 0 (fonction (**TimeGreaterThan(0)**)) et le temps où  $S_n$  est inférieur ou égale à 0 (fonction (**TimeLessThan(0)**)) pour  $n \in [0; 30]$ :

```

TimeGreaterThanPoint(0)
18

```

```

TimeLessThanPoint(0)
12

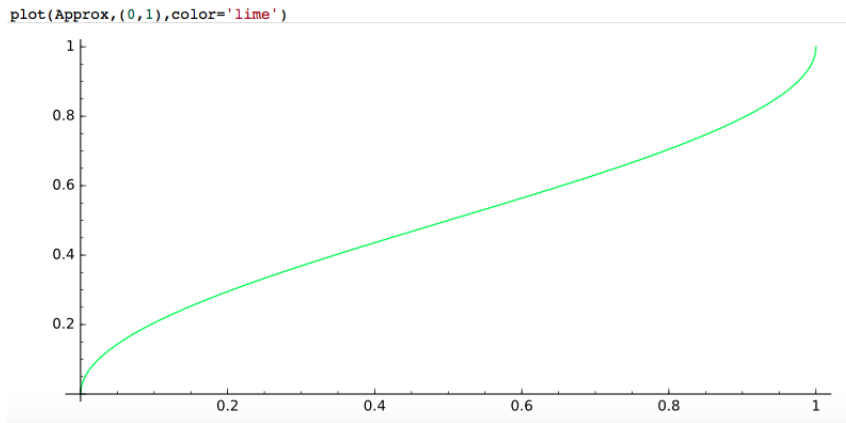
```

Il est possible de choisir n'importe quel point d'ordonnée pour les fonctions **TimeGreaterThan(n)** et **TimeLessThan(n)** pour  $n \in [0, 30]$ .

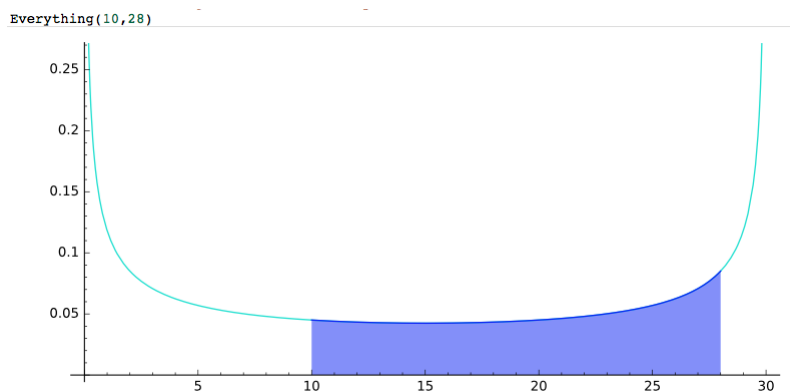
Comme dans cette sous-section on se restreint à quelques exemples, nous laissons à l'attention du lecteur d'observer les probabilités sur les marches aléatoires sur le programme *Sage*.



Avec `plot(Approx,(0,1),color='lime')` le programme rend la représentation graphique de la fonction  $f(x)$  dans l'intervalle  $[0,1]$



Le dernier résultat du programme est la fonction **Everything(a,b)** qui rend la représentation graphique de la loi de l'arcsinus avec la probabilité exacte et approximée de que le dernier retour à l'origine soit dans l'intervall  $[a, b]$  où  $0 \leq a < b \leq 30$  choisi. Ici  $[a, b] = [10, 28]$ .



$$\frac{2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{14}{15}}\right)}{\pi} - \frac{2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\pi}$$

Probabilité approximée  
0.441915476488203

## 5.2 Étude informatique du mouvement Brownien

Pour réaliser l'étude du mouvement Brownien à l'aide d'un programme informatique (toujours avec le logiciel *Sage*), nous travaillons dans les conditions suivantes :

- Nous nous limitons à la dimension 2.
- On mesure la position de la particule toutes les secondes. Ainsi, le temps est une variable naturelle.
- Le champ de déplacement de la particule (représentée par un point dans le résultat du programme) est un disque centré sur l'actuelle position de la particule et dont le rayon est un paramètre que l'on peut librement choisir.

En premier lieu, nous allons faire varier le rayon du champ de déplacement et voir comment sont réparties les différentes positions de la particule.

En deuxième lieu, nous allons faire varier le nombre de positions mesurées et voir comment évolue leur répartition au fur et à mesure qu'on mesure plus de positions de la particule.

### 5.2.1 Influence de la superficie du champ de déplacement sur le mouvement Brownien

Tout au long de cette sous-section, nous fixons le nombre de positions mesurées (qu'on note  $n_{position}$ ) à 500. Nous allons uniquement illustrer le mouvement Brownien de la particule pour des valeurs croissantes du rayon (qu'on note  $r_{champ.move}$ ).

Voici les illustrations mentionnées ci-dessus :

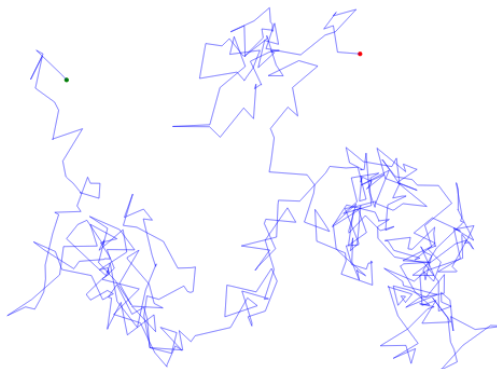


Figure 13 – Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 1 (unité quelconque)

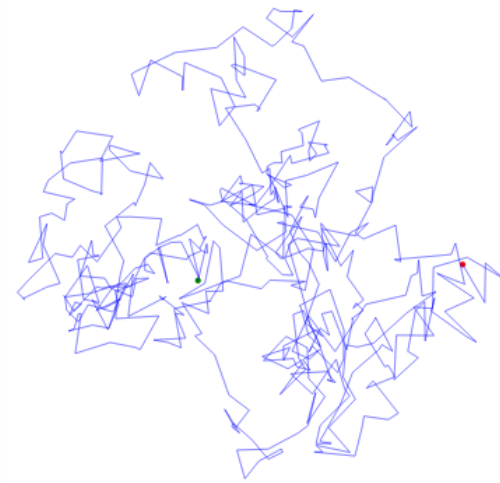


Figure 14 – Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 5 (unité quelconque)

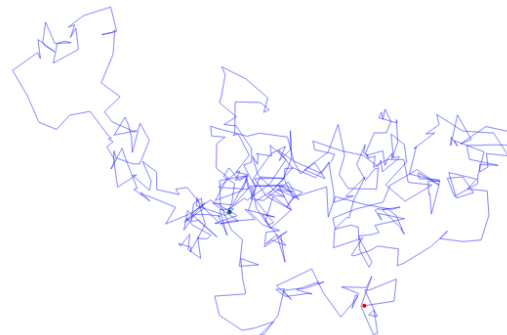


Figure 15 – Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 10 (unité quelconque)

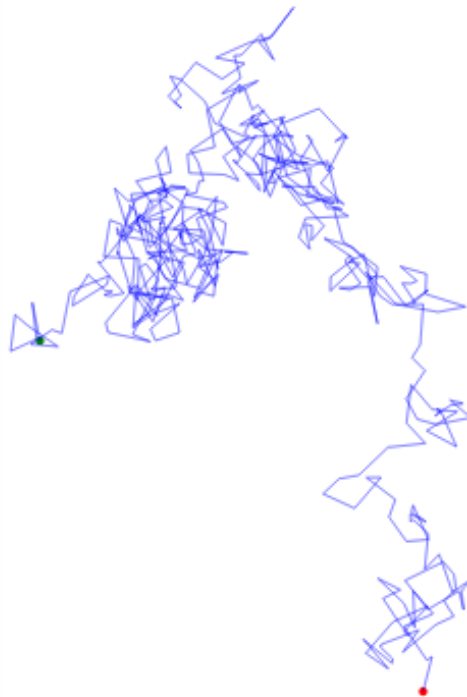


Figure 16 – Mouvement Brownien avec un champ de déplacement de rayon 20 (unité quelconque)

En comparant ces 4 situations, l'on constate que la particule occupe toujours toute la place disponible. Donc, chaque endroit du plan peut être à tout moment occupé par la particule. Ainsi, si on considère un sous-espace fini et compact  $\alpha$  du plan  $\Pi$ , chaque point de  $\alpha$  correspondra à une position de la particule à un instant  $t \in [0, \infty[$ .

Mathématiquement, cela signifie que si  $\text{card}(\alpha) < \infty$ , alors  $\exists m \in \mathbb{N} : \bigcup_{t=0}^m P_t = \alpha$  où  $P_t$  est la position de la particule à l'instant  $t$  et  $\alpha$  est le sous-espace étudié.

Ou bien, puisque  $\alpha$  est compact, on considère un recouvrement ouvert et un sous-recouvrement fini tel que ce dernier (tout comme le recouvrement ouvert, mais il n'est pas important ici) recouvre  $\alpha$ . Comme nous avons besoin d'ouverts, nous prenons comme ouverts les intervalles  $]x_{t-1}, x_t[ \times ]y_{t-1}, y_t[$  où  $t \in [1, \infty[$ ,  $(x_t, y_t)$  sont les coordonnées de la position de la particule à l'instant  $t$  et  $(x_{t-1}, y_{t-1})$  sont les coordonnées de la particule à l'instant  $t - 1$ .

Ainsi, notre observation signifie mathématiquement que si  $\alpha$  est compact, alors  $\exists m \in \mathbb{N} : \bigcup_{t=1}^m ]x_{t-1}, x_t[ \times ]y_{t-1}, y_t[ = \alpha$

Par contre, dès que la zone de déplacement de la particule est infinie, cette particule ne peut ainsi donc jamais parcourir la zone entière vu qu'il n'y a aucune frontière. Mais comme nous vivons dans un monde fini (le monde réel), la particule finit toujours par parcourir toute la zone après un certain temps aussi

longtemps que cette zone est une surface plane.

Une autre observation est que lors d'un mouvement Brownien, il y a certaines zones qui sont nettement plus occupées que d'autres. Si on note  $D_{t,\alpha}$  la densité de positions occupées par la particule dans une zone  $\alpha$  pendant une durée  $t$ , c'est-à-dire  $D_{t,\alpha} = \frac{\text{card}(\{P_t \in \alpha, t \in [0, t]\})}{t}$ , alors  $\exists \alpha \subset \mathbb{R}^2 : 0 \lll D_{t,\alpha} < 1$  et  $\exists \beta \subset \mathbb{R}^2 : 0 < D_{t,\alpha} \lll 1$ .

En plus de cela, il existe des zones  $\alpha \subset \mathbb{R}^2$  qui ne sont occupées qu'une seule fois par la particule. La densité de positions occupées par la particule vaut dans ce cas  $D_{t,\alpha} = \frac{1}{t}$ . Si on analyse le mouvement Brownien de la particule pendant une durée infinie, la densité de telles zones vaut alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$ . Ceci veut donc dire que ces zones sont considérées comme jamais parcourues par la particule !

Pour terminer, la seule observation que l'on fait concernant l'influence du rayon du champ de déplacement est que plus le rayon augmente (imaginez par exemple que la valeur du rayon correspond à la vitesse de la particule), plus la particule s'éloigne des zones  $\alpha$  à forte densité  $D_{t,\alpha}$ . Donc :

$$r_{\text{champ.move}} \propto \max_{t \in [0, t[} d(P_t, \alpha)$$

### 5.2.2 Influence du nombre de positions mesurées sur le mouvement Brownien

Tout au long de cette sous-section, nous fixons le rayon à 1. Comme dans la sous-section précédente, nous allons uniquement illustrer le mouvement Brownien de la particule, mais cette fois pour des valeurs croissantes du nombre de positions mesurées.

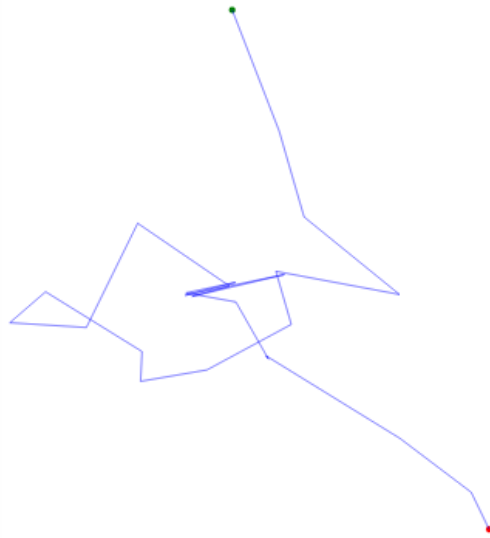


Figure 17 – 25 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité



Figure 18 – 50 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité



Figure 19 – 100 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité





Figure 20 – 200 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité

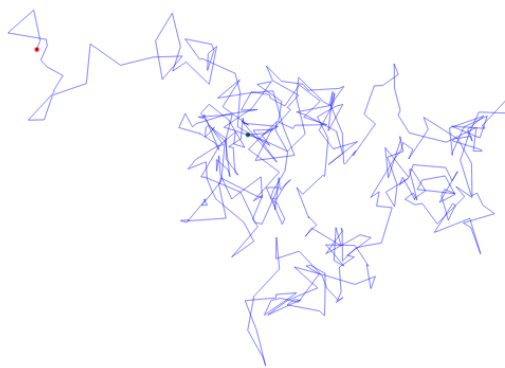


Figure 21 – 400 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité

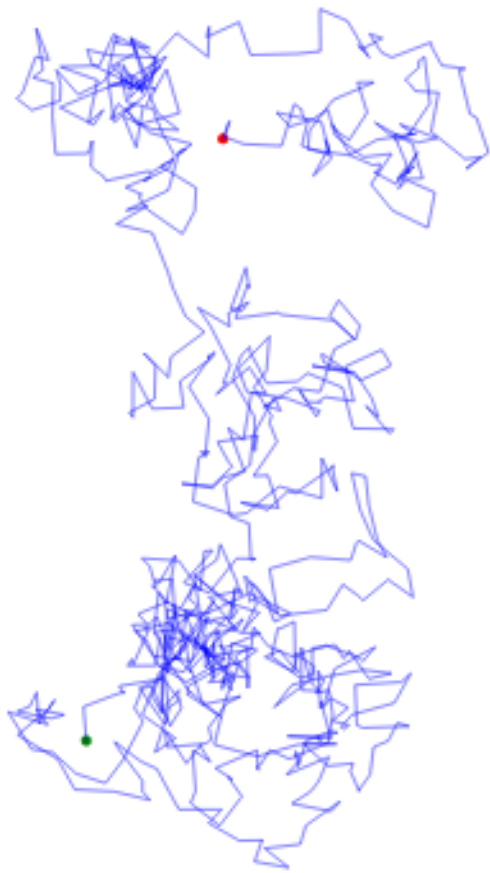


Figure 22 – 800 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité

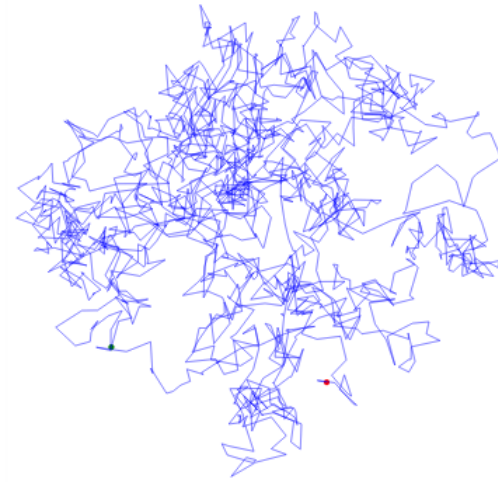


Figure 23 – 1600 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité

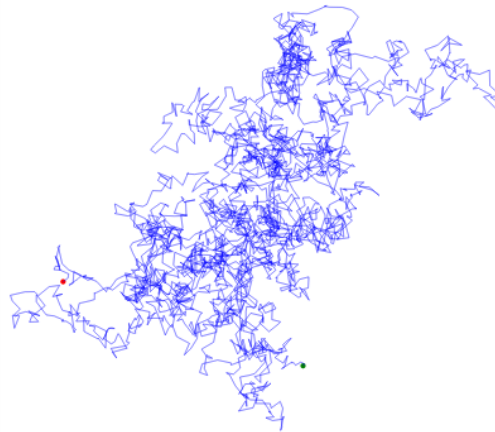


Figure 24 – 3200 premières positions du mouvement Brownien dans le disque-unité

Analysons ces 8 situations:

En gros, les observations sont les mêmes que dans la sous-section précédente.

Néanmoins, on constate en plus de cela que plus le nombre de positions mesurées augmente, plus le nombre de zones  $\alpha_i (i \in \mathbb{N})$  à forte densité  $D_{t,\alpha}$  augmente. Donc :

$$n \propto \text{card}(\{\alpha \subset \mathbb{R}^2 \mid 0 \ll D_{t,\alpha} < 1\})$$

## 6 Conclusion

Pour conclure, l'étude sur les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$  nous a permis l'analyse de plusieurs résultats qui ont pu être interprétés comme une modélisation du jeu de pile ou face.

On a pu constater, à l'aide de la loi de l'arcsinus, un résultat contre-intuitif dans le jeu pile ou face. En effet, cette loi exprime mathématiquement que lors d'un jeu avec une pièce parfaitement équilibrée l'égalité des chances ne garantit pas l'équilibre à long terme et ceci de façon complètement indépendante du nombre de lancers!

En d'autres termes, soit les gains soit les pertes seront majoritaires. On a analysé des résultats impressionnants comme, par exemple:

- la probabilité que le dernier retour à l'origine soit dans la première partie du jeu est de 50%!
- la probabilité que dans un jeu de pile ou face de 100 lancers un joueur n'ait pas perdu est d'environ 0.08.
- pour un jeu avec une infinité de lancers, la marche aléatoire passera une infinité de fois par chaque entier et ceci avec une probabilité égal à 1.

La conclusion qu'il faut absolument retenir de notre étude du mouvement Brownien est que aussi longtemps que le mouvement d'une particule, d'une personne ivre ou d'autre chose a lieu dans un plan compact (une surface 2-dimensionnelle compacte) de superficie/aire finie, ceux-ci parcourent toujours tous les endroits de la zone pendant un laps de temps qui peut varier d'une situation à l'autre.

En outre, on a aussi constaté que certaines zones sont plus souvent occupées par la particule (ou la personne ivre) que d'autres zones. Le nombre d'apparition de telles zones augmente avec le nombre croissant de positions mesurées. Ce résultat est d'ailleurs tout à fait cohérent en pratique; imaginons la situation suivante :

Vous vous baladez seul(e) en forêt et vous décidez après une demi-heure de marche de faire une pause. Puis, vous constatez en mettant votre main dans votre poche gauche que vous avez perdu vos clés de maison en chemin ! Alors, presque instinctivement, vous commencez à fouiller dans la zone environnante et, si vous ne trouvez toujours pas vos clés, vous marchez jusqu'à une autre zone où vous pensez avoir perdu vos clés. Si vos clés ne sont de nouveau pas dans cette zone, vous marchez et ce jusqu'à une troisième zone où se trouvent potentiellement vos clés et ainsi de suite.

Cependant, il est impératif de préciser que ces résultats ne sont valables que lorsque le déplacement de l'objet que l'on étudie se fait sur une surface 2-dimensionnelle finie et compacte !

Conclusions finales à ne pas prendre trop au sérieux sur les marches aléatoires:

*Perdre son enfant dans un centre commercial (3 dimensionnel) est moins grave  
que perdre son enfant dans la rue (2 dimensionnel)!*

&

*A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.<sup>[1]</sup>*

- Shizuo Kakutani

<sup>[1]</sup> Traduction: Un marcheur bourré finit par rentrer chez lui mais un oiseau bourré ne retrouve pas son nid!

## 7 Bibliographie

Gregory F. Lawler et Vlada Limic, *Random Walk: A Modern Introduction*, *Cambridge studies in advanced mathematics*, première édition, Cambridge University Press, New York, 2010

John Chiasson, *Introduction to Probability Theory and Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2013

George H. Weiss, *Random Walks and Their Applications: Widely Used as Mathematical Models, Random Walks Play an Important Role in Several Areas of Physics, Chemistry, and Biology.*, *American Scientist*, vol. 71, n°1, 1983, pp. 65-71

P. Deheuvels, *La probabilité, le hasard, et la certitude*, Presses Universitaires de France, 1982

E. Lesign, *Pile ou Face*, Ellipses, 2001

*Hasard et Probabilités, La science de l'aléa*, Tangente Hors Série n°17, Bibliothèque Tangente, Éditions POLE, Paris 2004

<http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2014-2015/ProbaStat/probostat.pdf>

<http://images.math.cnrs.fr/Des-marches-aleatoires-pas-comme.html?lang=fr>

<http://math.univ-lyon1.fr/garban/Slides/doua.pdf>

<http://podcastscience.fm/tag/marche-aleatoire/>

[http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/seminaires/chemins3\\_exposeirem.pdf](http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/seminaires/chemins3_exposeirem.pdf)

[www.proba.jussieu.fr/pageperso/eric/polya.pdf](http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/eric/polya.pdf)

[www.lptmc.jussieu.fr/user/sator/old/Chapitre2.pdf](http://www.lptmc.jussieu.fr/user/sator/old/Chapitre2.pdf)

[http://math.uni.lu/thalmaier/LEHRE/LUX\\_2016-17\\_Prob3/proba\\_stat.pdf](http://math.uni.lu/thalmaier/LEHRE/LUX_2016-17_Prob3/proba_stat.pdf)

<http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2014-2015/ProbaStat/probostat.pdf>

[http://www.tricki.org/article/Bijections\\_and\\_counting](http://www.tricki.org/article/Bijections_and_counting)

<http://mathworld.wolfram.com/PolyasRandomWalkConstants.html>

<http://www.math.cornell.edu/mec/Winter2009/Thompson/randomwalks.html>

<http://mathworld.wolfram.com/PolyasRandomWalkConstants.html>

<http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk3-Dimensional.html>

[http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/seminaires/chemins3\\_exposeirem.pdf](http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/seminaires/chemins3_exposeirem.pdf)

<http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affichequoi=. /m/marchealea.html>

<http://www.sascommunity.org/planet/blog/2015/07/page/6/>

<http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Diss169.pdf>

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Passeio\\_aleatório](https://pt.wikipedia.org/wiki/Passeio_aleatório)

<http://culturemath.ens.fr/math/pdf/proba/marchesZ.pdf>

[http://www.ime.unicamp.br/popov/slides/moeda\\_slides.pdf](http://www.ime.unicamp.br/popov/slides/moeda_slides.pdf)

[https://books.google.lu/books?id=9qNt\\_UPCSzEC&pg=PA83&lpg=PA83dq=théorème+de+polya+marche+aléatoire&source=bl&ots=hVYHCZgGfC&sig=GR55tGpofrlLZmk2hczCvvcraFM&hl=fr&sa=X&sqi=2&redir\\_esc=y#v=onepage&q=théorème%20de%20polya%20marche%20aléatoire&f=false](https://books.google.lu/books?id=9qNt_UPCSzEC&pg=PA83&lpg=PA83dq=théorème+de+polya+marche+aléatoire&source=bl&ots=hVYHCZgGfC&sig=GR55tGpofrlLZmk2hczCvvcraFM&hl=fr&sa=X&sqi=2&redir_esc=y#v=onepage&q=théorème%20de%20polya%20marche%20aléatoire&f=false)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement\\_brownien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_brownien)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème\\_de\\_Donsker](https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Donsker)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Variables\\_indépendantes\\_et\\_identiquement\\_distribuées](https://fr.wikipedia.org/wiki/Variables_indépendantes_et_identiquement_distribuées)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées\\_sphériques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées_sphériques)

<http://dl.lateralis.org/public/sagebook/sagebook-web-20130530.pdf>