

Projet en mathématiques expérimentales
Semestre III

Wolff Vincent, Karst Philippe, Geimer Arno

12 janvier 2018

Table des matières

1	Définitions	4
2	Morphismes de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{R})$	5
3	Morphismes de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{C})$	6
4	Morphismes de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$	7
5	Enveloppes convexes des orbites	8
5.1	Dans \mathbb{C} :	8
5.2	Dans $\mathbb{R} + \tau\mathbb{R}$:	9

Résumé

Le but de ce projet est de visualiser l'action de PSL sur le demi-espace supérieur par des enveloppes convexes sur l'orbite d'un point.

1 Définitions

Définition 1. Le *Groupe libre* \mathbb{F} engendré par un ensemble S est tel que toute application de S dans un groupe G s'étend de manière unique en un morphisme de \mathbb{F} vers G . Cela revient à dire que les éléments de S sont "indépendants", c'est-à-dire que les images des uns ne contraignent pas les images des autres. Pour le reste du projet, nous travaillerons avec le groupe libre \mathbb{F}_2 , i.e. $\#S = 2$.

Définition 2. Le *Groupe projectif spécial linéaire sur V* , $PSL(n, F)$, où $V = F^n$ est un espace vectoriel de dimension n , est défini comme le quotient de $SL(V)$ par $SZ(V)$, SL étant le groupe spécial linéaire sur V et $SZ(V)$ son sous-groupe de transformations scalaires avec déterminant normal. Dans ce projet, nous considérerons les groupes $PSL(2, \mathbb{R})$ et $PSL(2, \mathbb{C})$, donc les groupes des matrices à coefficients dans \mathbb{R} , respectivement \mathbb{C} , qui ont déterminant 1 et qui ne sont pas des matrices scalaires.

Définition 3. Le *Demi-plan supérieur* est défini par :

$$\mathbb{H}^2 := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid b > 0\}$$

Corrolaire 1. Les définitions précédentes nous mènent à l'action de $PSL(2, F)$ sur \mathbb{H}^2 . Soit $M \in PSL$ une matrice à coefficients dans \mathbb{R} resp. \mathbb{C} ,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Soit $z \in \mathbb{H}^2$, $z = x + iy$. Alors

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{ax + b + iay}{cx + d + icy}$$

En développant, on remarque que PSL envoie \mathbb{H}^2 sur \mathbb{H}^2 .

Définition 4. Soit x un point dans \mathbb{H}^n avec $n \in \mathbb{N}$, soit $\phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ un morphisme de groupes. Alors l'*orbite* de x est définie par l'ensemble suivant :

$$Orb(x) := \{M(x) \mid M \in Im(\phi)\}$$

Définition 5. On appelle l'*ensemble des nombres pseudo-complexes* l'ensemble $\mathbb{R} + \tau\mathbb{R} := \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, où τ est un symbole formel. On définit l'addition et la multiplication sur $\mathbb{R} + \tau\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned} (a + b\tau) + (c + d\tau) &:= (a + c) + (b + d)\tau \\ (a + b\tau)(c + d\tau) &:= (ac + bd) + (ad + bc)\tau \end{aligned}$$

Par définition, $\tau^2 = 1$. Il est facile de vérifier que la commutativité, l'associativité ainsi que la distributivité s'appliquent dans $\mathbb{R} + \tau\mathbb{R}$, avec élément neutre 1. Néanmoins, pas tous les nombres pseudo-complexes n'ont un inverse.

Définition 6. On appelle *Triangulation de Delaunay* d'un ensemble de points E une division de E en triangles tels qu'aucun point de E ne se trouve à l'intérieur strict du cercle circonscrit d'un triangle. Cette triangulation n'est pas nécessairement unique.

2 Morphismes de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{R})$

Le premier but est de trouver des morphismes $\phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ tels que la trace du commutateur soit égale à -2 à conjugaison près. C'est-à-dire que, pour $a, b \in \mathbb{F}_2$:

$$tr(\phi[a, b]) = -2$$

avec $\phi[a, b] := A * B * A^{-1} * B^{-1}$ pour $\phi(a) = A$ et $\phi(b) = B$. On remarque que le morphisme est entièrement déterminé par l'image des éléments de S (cf. définition du groupe libre). On prend B comme :

$$B = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix}$$

À partir de cela, on peut déduire la forme de la matrice A .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Or la trace du commutateur de A et B doit être égale à -2 :

$$tr \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \right] = -2$$

On veut que A envoie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (s) = s$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (t) = t$$

avec $s, t \in \mathbb{R}^*$. Par calculs en SageTM, on trouve que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-s+t+\sqrt{s^2+2st+t^2+4}}{2} & st \\ 1 & a+s-t \end{pmatrix}$$

et donc

$$B = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1/l \end{pmatrix}$$

avec $l = \sqrt{\frac{2\sqrt{st+1}+2+st}{st}}$.

3 Morphismes de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{C})$

On a : $\mathbb{H}^3 = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_+\}$, avec $ij = -ji$ et $j^2 = -1$.
L'action de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur \mathbb{H}^3 est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z + tj) := \frac{a(z + tj) + b}{c(z + tj) + d}$$

Soit $\overline{z + tj} := \bar{z} - tj$.
Alors $(z + tj)\overline{(z + tj)} = |z|^2 + t^2$.

Lemme 1. $PSL(2, \mathbb{C})$ renvoie \mathbb{H}^3 sur \mathbb{H}^3 .

Démonstration.

$$\begin{aligned} A(z + tj) &= \frac{a(z+tj)+b}{c(z+tj)+d} \\ &= \frac{(a(z+tj)+b)((\bar{z}-tj)\bar{c}+\bar{d})}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \\ &= \frac{a(z+tj)(\bar{z}-tj)\bar{c}+a(z+tj)\bar{d}+b(\bar{z}-tj)\bar{c}+\bar{b}\bar{d}}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \\ &= \frac{a(|z|^2-ztj+ztj+t^2)\bar{c}+az\bar{d}+adtj+b\bar{z}\bar{c}-bctj+\bar{b}\bar{d}}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \\ &= \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}+a\bar{c}t^2+tj}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \in \mathbb{H}^3 \end{aligned}$$

□

Les matrices A et B sont de la même forme que celles dans $PSL(2, \mathbb{R})$, seulement avec des coefficients complexes.

4 Morphismes de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$

Lemme 2. $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$ est isomorphe à $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $\omega_+ := \frac{1+\tau}{2}$ et $\omega_- := \frac{1-\tau}{2}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) &\rightarrow PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R}) \\ (C_1; C_2) &\mapsto C_1\omega_+ + C_2\omega_- \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On prouve cela en remarquant que

$$\begin{aligned} \omega_+\omega_- &= 0 \\ \omega_+\omega_+ &= \omega_+ \\ \omega_-\omega_- &= \omega_- \end{aligned}$$

□

Lemme 3. $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$ envoie \mathbb{H}^3 sur \mathbb{H}^3 .

Démonstration. En remarquant que, comme dans $PSL(2, \mathbb{C})$, $\tau j = -j\tau$ et que $(a + \tau b)(a - \tau b) = a^2 - b^2 \in \mathbb{R}$, la preuve est analogue à celle du Lemme 1. □

Construisons maintenant un morphisme de \mathbb{F}_2 dans $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$.
On définit

$$\begin{aligned} \phi' : \mathbb{F}_2 &\rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) : \\ &\begin{cases} a &\mapsto (A_1; A_2) \\ b &\mapsto (B_1; B_2) \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_i(s_i) &= s_i \\ A_i(t_i) &= t_i \end{aligned}$$

ce qui nous mène, comme dans $PSL(2, \mathbb{R})$, à

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & s_i t_i \\ 1 & a_i + s_i - t_i \end{pmatrix} \quad B_i = \begin{pmatrix} l_i & 0 \\ 0 & 1/l_i \end{pmatrix}$$

avec $l_i = \sqrt{\frac{2\sqrt{s_i t_i + 1} + 2 + s_i t_i}{s_i t_i}}$.

Finalement, on obtient le morphisme $\Gamma = \psi \circ \phi' : \mathbb{F}_2 \rightarrow PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$.

5 Enveloppes convexes des orbites

Nous définissons l'orbite d'un point $a \in \mathbb{H}^3$ dans \mathbb{H}^2 comme suit :

$$Orb_{\mathbb{H}^2}(a) := \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x, y, z) \in Orb(a), z \leq 10^{-3}\}.$$

Pour visualiser, on applique la triangulation de Delaunay sur l'orbite.

5.1 Dans \mathbb{C} :

Supposons qu'on ait $Orb_{\mathbb{H}^2}(a)$.

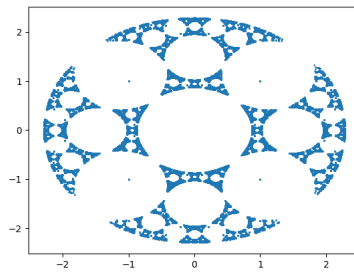


FIGURE 1 – $Orb_{\mathbb{H}^2}(1i, 2i)$

On construit, à l'aide de la triangulation de Delaunay, des "cercles maximaux", c'est-à-dire des cercles tels que :

- tout cercle contienne au moins trois points de l'orbite
- il n'y ait aucun point de l'orbite à l'intérieur d'un cercle
- tout point de l'orbite appartienne à au moins un cercle

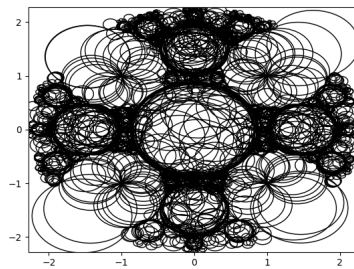


FIGURE 2 – $Orb_{\mathbb{H}^2}(1i, 2i)$ avec "cercles maximaux"

Ensuite, on construit pour tout cercle la demi-sphère dans \mathbb{H}^3 de même rayon et de même centre que le cercle.

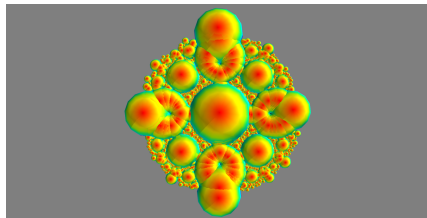


FIGURE 3 – $Orb_{\mathbb{H}^2}(1i, 2i)$ avec demi-sphères

5.2 Dans $\mathbb{R} + \tau\mathbb{R}$:

Supposons qu'on ait $Orb_{\mathbb{H}^2}(a)$.

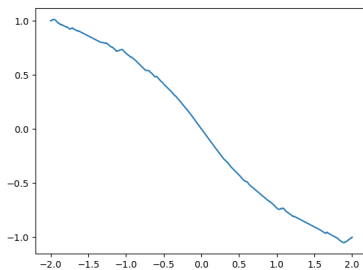


FIGURE 4 – $Orb_{\mathbb{H}^2}((1, 3); (3, 5))$

On construit, à l'aide de la triangulation de Delaunay, des "hyperboles maximales", c'est-à-dire des hyperboles telles que :

- toute hyperbole contienne au moins trois points de l'orbite
- tous les points de l'orbite soient du même côté que le centre de l'hyperbole
- tout point de l'orbite appartienne à au moins une hyperbole

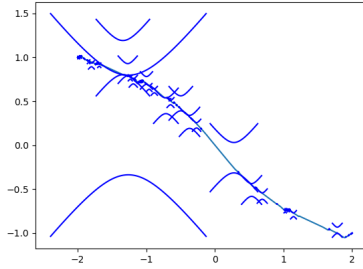


FIGURE 5 – $Orb_{\mathbb{H}^2}((1, 3); (3, 5))$ avec "hyperboles maximales"

Ensuite, on construit pour toute hyperbole l'hyperboloïde correspondante. L'hyperbole a l'équation paramétrique

$$\{(a \sinh t, \pm a \cosh t), t \in]-\infty; +\infty[\}$$

Alors son hyperboloïde correspondante a l'équation

$$\{(a\sqrt{1+t^2} \cos(\theta), a\sqrt{1+t^2} \sin(\theta), at), t \in]-\infty; +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[\}$$

Cela correspond, en effet, à une rotation de l'hyperbole autour de l'axe non focal.

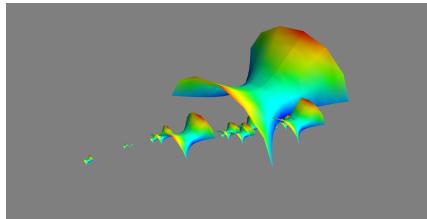


FIGURE 6 – $Orb_{\mathbb{H}^2}((1, 3); (3, 5))$ avec hyperboloïdes