Une excursion dans les densités arithmétiques dans $\mathbb{N}$

Mathématiques expérimentales

BASI mathématiques 2^e semestre

Bruno CARVALHO, Alex SCHAMMO, Philippe KARST, Arno GEIMER

1^er juin 2017

Table des matières

1 Définitions et Lemmes **3**

2 Etude sur la densité des entiers sans carré de 1 à x par intuition **4**

3 Densité sur $\mathbb{N}$ **5**
3.1 La fonction de Möbius 5
3.2 La fonction Zéta de Riemann 6
3.3 Approche rigoureuse 6

4 Programmation **8**

5 Expérimentation et visualisation **9**
5.1 Vérification de la proposition (2) en 3.3 9
5.2 Vérification graphique des calculs 10
5.3 Entiers sans facteurs de puissance k 11
5.3.1 Graphiques pour k = 3 11
5.3.2 Graphiques pour k = 4 12
5.3.3 Comparaison des 3 graphes précédents 12

1 Définitions et Lemmes

Définition 1. On appelle un nombre $n \in \mathbb{N}$ un *carré parfait* si $\exists a \in \mathbb{N}$ tel que $n = a^2$.

Définition 2. Soit E un ensemble fini ou infini. On appelle *cardinal* de E, noté $\#E$, le nombre n d'éléments de E, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3. Soient E et F deux ensembles finis, $E \subseteq F$. On appelle *densité de E dans F* le rapport $\frac{\#E}{\#F}$.

Définition-Lemme 1. On appelle un nombre $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, sans facteur carré si le seul carré parfait qui divise n est 1.

Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) a est sans facteur carré
ii) Le degré des facteurs premiers de a est au plus 1.

Démonstration.

$i \implies ii$:
Par le théorème fontamental de l'arithmétique, $a = \prod_{k=1}^{n} {p_k}^{m_k}$, $m_k \in \mathbb{N}$ et p premier (Dans la suite, p désignera toujours un nombre premier). Or, comme le plus grand carré parfait qui divise a est 1,
$m_k \leq 1 \quad \forall p_k$.

$ii \implies i$:
Puisque $a = \prod_{k=1}^{n} {p_k}^{m_k}$, $m_k \in \{0; 1\}$ et p premier, il n'existe pas de carré parfait $b \neq 1$ tel que $b|a$.

□

2 Etude sur la densité des entiers sans carré de 1 à x par intuition

Par le Lemme 1, on déduit que $\frac{1}{p^2}$ des nombres entre 0 et x sont divisibles par p^2.

Exemple 2.1. Entre 0 et x, tout quatrième nombre est divisible par 2^2, donc $\frac{1}{2^2}$ des nombres est divisible par le carré de 2.

Exemple 2.2. Entre 0 et x, tout neuvième nombre est divisible par 3^2, donc $\frac{1}{3^2}$ des nombres est divisible par le carré de 3.

La densité des nombres non divisibles par p^2 est donc égale a $1 - \frac{1}{p^2}$.
On en conclut que la densité des entiers sans facteur carré entre 0 et x est égale à

$$\prod_{p=2}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

Il en suit par analogie que la densité des nombres non divisibles par p^k est égale a

$$\prod_{p=2}^{\lfloor\sqrt[k]{x}\rfloor}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)$$

3 Densité sur $\mathbb{N}$

3.1 La fonction de Möbius

On appelle

$$\mu : \mathbb{N} \to \{-1; 0; 1\}$$

$$n \mapsto \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si n est divisible par } p^2 \\ 1 \text{ si n a un nombre pair de facteurs premiers} \\ -1 \text{ si n a un nombre impair de facteurs premiers} \end{array} \right.$$

la fonction de Möbius.
Par convention, on définit $\mu(1) = 1$.

Theorème 3.1.

$$\sum_{d|n} (\mu(d)) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & n = 1 \\ 0 & si & n > 1 \end{array} \right.$$

Démonstration. Pour $n = 1$: par définition.
Pour $n > 1$:
Soit P l'ensemble de facteurs premiers de n :
Nous allons démontrer qu'il existe exactement le même nombre de sous-ensembles de P ayant un cardinal pair que ceux ayant un cardinal impair, ce qui prouve notre assertion. Soit $S_{ij} = \{p_i, p_{i+1}, ..., p_{j-1}, p_j\}$, avec $i; j \leq \#P$.

Fixons $p \in P$.
Soit le couple $(S, S \cup p)$ avec $p \notin S$.
Alors pour chaque partie $S_{ij} \in P$, $\exists!(S, S \cup p) \,|\, S_{ij} \in (S, S \cup p) \, \forall S_{ij}$.
Or $\#(S \cup P) = \#S + 1$, donc un couple consiste de deux sous-ensembles de cardinaux de parités opposées.
Donc P possède autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair, et donc pour $n > 1$

$$\sum_{d|n} (\mu(d)) = 0\,.$$

□

Exemple 3.1.

$$\sum_{d|6} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6) = 1 + (-1) + (-1) + 1 = 0$$

3.2 La fonction Zéta de Riemann

On appelle fonction zéta de Riemann la fonction

$$\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...$$

Remarque 1.
En utilisant l'expression $\frac{\sin x}{x}$, on arrive à exprimer $\zeta(2n)$ en fonction de π.

Exemple 3.2. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

En 2000, T. Rivoal a prouvé que les $\zeta(2n+1)$ sont tous irrationnels, mais sans donner une méthode directe pour les calculer.

3.3 Approche rigoureuse

Soit $Q(x) = \#\{n < x \mid \text{n est sans facteur carré }\}$
Il est évident que

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n).$$

Or on a :

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d).$$

En effet, $\mu^2(n) = 0$ ou $\mu^2(n) = 1$. Si n est sans facteur carré, par l'identité $\mu(1) = 1$ on a $\sum_{d^2|n} \mu(d) = 1$. Si n possède un facteur carré, alors pour tous les d tels que $d^2|n$, les $\mu(d)$ s'éliminent mutuellement et on arrive donc au résultat.
On a donc :

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d^2 \ n} \mu(d) = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \mu(d)(\frac{x}{d^2} + O(1)),$$

avec $O(1) \in [0; 1[$ comme imprécision de $\sqrt{x}$, le $\frac{x^2}{d}$ venant du fait qu'on ne se concentre que sur les d tels que $d^2|n$.

$$\sum_{d \leq \sqrt{x}} \mu(d)(\frac{x}{d^2} + O(1)) = x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \sum_{d \leq \sqrt{x}} O(1) = x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x})$$

On peut maintenant en faire une somme infinie, puisque

$$x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) = x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) + x \sum_{d > \sqrt{x}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x \sum_{d > \sqrt{x}}^{\infty} \frac{1}{d^2}), \quad (1)$$

avec $O(x\sum_{d>\sqrt{x}}^{\infty}\frac{1}{d^2})$ étant l'imprécision maximale possible si tout $\mu(d)$ est égal soit à 1, soit à -1 pour $d>\sqrt{x}$. Or (1) est égal a

$$x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x}+x\sum_{d>\sqrt{x}}^{\infty}\frac{1}{d^2}).$$

On pourrait démontrer par arguments d'intégration que $x\sum_{d>\sqrt{x}}^{\infty}\frac{1}{d^2}$ est proportionnel à $\sqrt{x}$ (2). Par expérimentation, on va le montrer en 5.1.

Or alors,

$$Q(x)=x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x}).$$

Lemme 3.3.1. *Par le produit d'Euler, on a :*

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{p\,prime}(1-\frac{1}{p^s})=(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{7^s})...$$

Or en développant, on remarque que

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

On arrive donc au résultat final :

$$Q(x)=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\sqrt{x})$$

Par analogie, on arrive à la formule pour les nombres sans facteurs de puissance s :

$$\#\{n\leq x\ tel\,que\,m^s\not|n\ ,m\in\mathbb{N}\}=\frac{x}{\zeta(s)}+O(\sqrt[s]{x})$$

4 Programmation

Ci-dessous se trouvent les algorithmes utilisés lors de l'expérimentation. Ils ont été écrits en SAGE ("System for Algebra and Geometry Experimentation"), un logiciel mathématique basé sur le langage de programmation PYTHON.

Le premier algorithme utilisé est la fonction g qui rend le nombre de facteurs carrés de x.

```
def g(x):
    a=-1
    for i in range(x):
        if (i^2).divides(x):
            a = a+1
        else :
            a = a
    return a
```

Le deuxième algorithme est la fonction f qui donne le nombre des entiers sans carré dans $[0; x[$

```
def f(x):
    b=1
    for i in range(x):
        if g(i) == 0:
            b = b+1
        else:
            b = b
    return b
```

Comme f n'est définie qu'en $\mathbb{N}$, on a créé la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ qui aide à représenter graphiquement f.

```
def h(x):
    return f(floor(x))
```

Le dernier algorithme est celui utilisé pour vérifier graphiquement la proposition (2) en 3.3. Il calcule $x \sum_{d>\sqrt{x}}^{\infty} \frac{1}{d^2}$ de d jusqu'à 5000.

```
def m(x):
    b = 0
    for i in range(5000) :
        b = b + (1/((sqrt(x)+i)^2))
    return b*x
```

5 Expérimentation et visualisation

5.1 Vérification de la proposition (2) en 3.3

La proposition (2) compare la fonction $m(x)$ avec la fonction racine carrée.

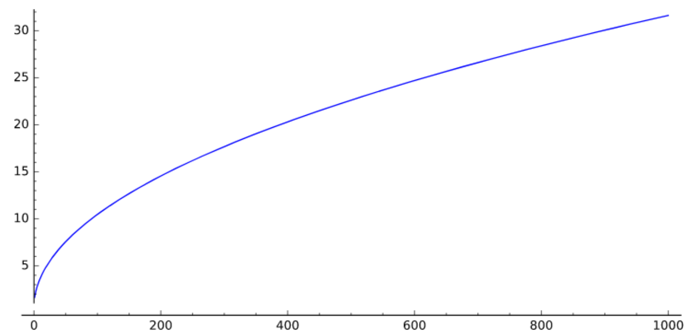

Figure 1 – La fonction $m(x)$ entre 1 et 1000.

En superposant le graphe de $m(x)$ et celui de $\sqrt{x}$, on voit clairement que les deux fonctions sont proportionnelles.

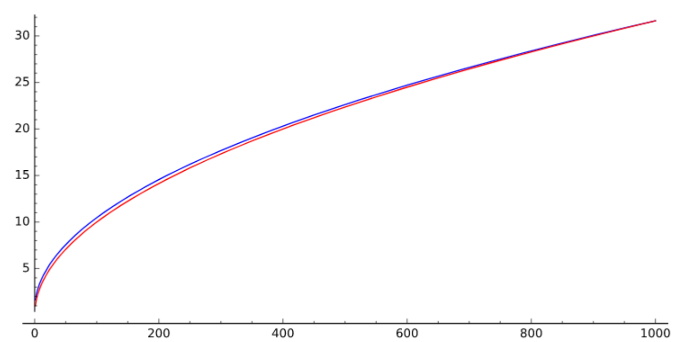

Figure 2 – Les deux fonctions entre 0 et 1000, $m(x)$ en bleu.

5.2 Vérification graphique des calculs

Voici la fonction h. En regardant son graphe, son rôle est clair : Elle compte les entiers sans carré entre 0 et x, x exclu.

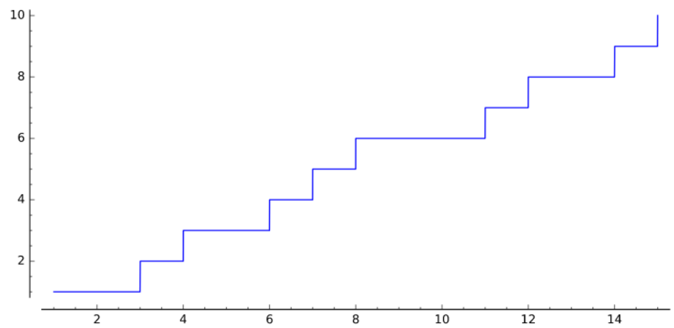

FIGURE 3 – $h(x)$ entre 0 et 15.

Si on compare cette fonction h avec l'approximation établie dans la section 3, on remarque l'équivalence des deux fonctions en ∞.

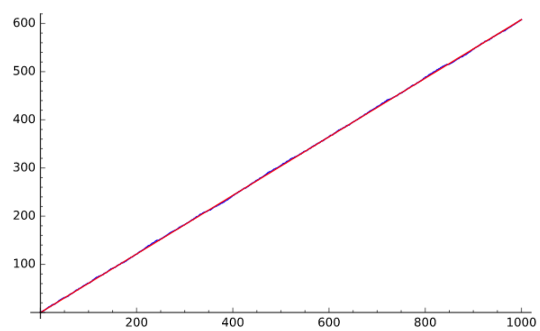

FIGURE 4 – $h(x)$ et la fonction $\frac{6x}{\pi^2}$ (en rouge) entre 0 et 1000

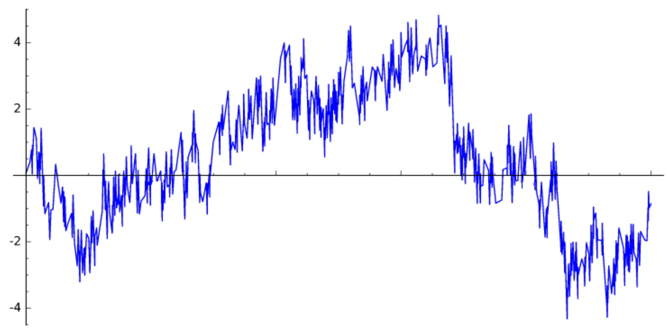

FIGURE 5 – La différence des fonctions de la figure 4 sur [1000 ; 2000]

5.3 Entiers sans facteurs de puissance k

5.3.1 Graphiques pour k = 3

Une légère modification de la fonction f nous fournit h pour les entiers sans facteurs de puissance 3.

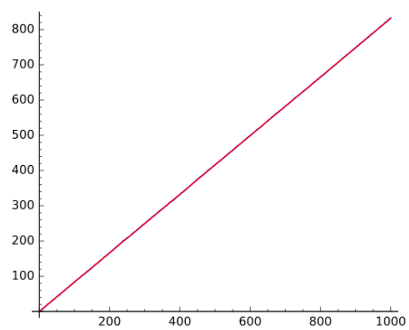

FIGURE 6 – $h(x)$ et la fonction $\frac{x}{\zeta(3)}$ (en rouge) entre 0 et 1000

5.3.2 Graphiques pour k = 4

Une autre modification de la fonction f nous fournit h pour les entiers sans facteurs de puissance 4.

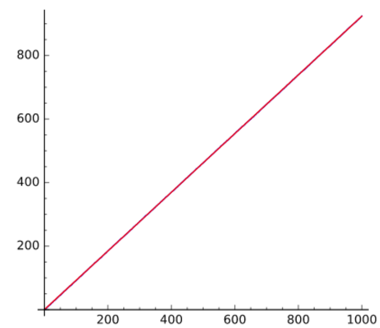

FIGURE 7 – $h(x)$ et la fonction $\frac{90x}{\pi^4}$ (en rouge) entre 0 et 1000

5.3.3 Comparaison des 3 graphes précédents

Considérons la suite de fonctions suivante : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec f_n la fonction h de la section 4 pour les entiers sans facteur de degré n. On remarque que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction identité.

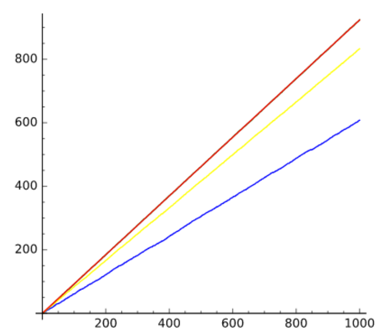

FIGURE 8 – la fonction h pour les carrés en bleu, pour les cubes en jaune et pour le degré 4 en vert, comparées à la fonction identité en rouge.

On remarque que dans la figure 8, la fonction de degré 4 n'est plus visible, puisqu'elle est déjà très proche de l'identité. En effet, $\frac{1}{\zeta(4)} \approx 0.924$, la pente de cette fonction est donc presque celle de l'identité.

Analysons maintenant la précision de l'approximation pour des nombres plus élevés :

densité entre 0 et ...	degré	nombre de facteurs sans puissance k	approximation	densité
100 000	2	60 794	60 792	0,60794
1 000 000	2	607 926	607 927	0,607926
10 000 000	2	6 079 291	6 079 271	0,607921
100 000	3	83 190	83 190	0,83190
1 000 000	3	831 910	831 907	0,831910
10 000 000	3	8 319 103	8 319 096	0,8319103
100 000	4	92 395	92 393	0,92395
1 000 000	4	923 939	923 938	0,923939
10 000 000	4	9 239 357	9 239 384	0,9239357

Comme on peut voir, l'approximation numérique est extrêmement proche du résultat expérimental obtenu.

Sources

Papallardi F., 2003, A Survey On k–Freeness, Dipartimento di Matematica, Universita Roma Tre, Rome

Mai 2017, Apéry's constant, *Wikimedia Foundation, Inc.*, https://en.wikipedia.org/wiki/Ap%C3%A9ry%27s_constant, (Mai 31, 2017)

Mai 2017, Riemann zeta function, *Wikimedia Foundation, Inc.*, https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function, (May 31, 2017)

Janvier 2017, Entiers sans facteur carré, *Wikimedia Foundation, Inc.* , https://fr.wikipedia.org/wiki/Entier_sans_facteur_carr%C3%A9, (Mai 31, 2017)

Aout 2016, Théorème fondamental de l'arithmétique, *Wikimedia Foundation, Inc.*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_fondamental_de_l%27arithm%C3%A9tique ,(Mai 31, 2017)

Decembre 2016, Möbius function, *Wikimedia Foundation, Inc.*, https://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_function, (Mai 31, 2017)

Weisstein, Eric W., "Möbius Function.", From MathWorld–A Wolfram Web Resource., http://mathworld.wolfram.com/MoebiusFunction.html, (Mai 31, 2017)