Dé équiprobable (non-standard)

Aganovic Mejrema Hukic Ibrahim

28 Mai 2019

Université du Luxembourg

Année académique 2019-2019 (Semestre d été)

1 Préface

Avant de commencer, précisons que ce projet a été élaboré par deux étudiants du Bachelor en Sciences et Ingénerie.
Il s'agit d'un travail en groupe qui a été fait à partir de mars 2019 jusqu'à juin 2019.
Nous avons eu le plaisir d'analyser différents résultats et de les utiliser tout au long du projet, de travailler avec différents logiciels qu'on a pu choisir librement.
De même on a eu la possibilité de visualiser nos pensées et idées directement avec des outils comme l'imprimante 3D qui nous a été mise à disposition.
Nous sommes reconnaissants d'avoir eu une telle expérience.

Nous voulons remercier à Monsieur Guerin et Monsieur Parlier qui nous ont guidé à travers ce projet et aussi à Monsieur Wolf et Monsieur Wolter qui nous ont expliqué les démarches à suivre pour utiliser une imprimante 3D.

Table des matières

2 Introduction

Dans notre vie quotidienne, les gens, qu'ils soient jeunes ou pas, jouent de temps en temps à des jeux de société. Une caractéristique que presque tous les jeux ont en commun, sont les dés.
Le plus souvent, il s'agit du dé bien connu, le cube.
Ce que nous a attiré dans ce projet, c'était essentiellement la question : Comment peut-on trouver d'autres dés, qui ne ressemblent pas aux nombreux dés bien connus (comme les solides de Platon, par exemple), mais qui sont toujours équiprobables ?
Ceci est le but principal de notre projet.

3 Démarche

Pour expliquer comment on a procédé à travers la problèmatique, voici quelques mots sur notre démarche.

Nous voulons d'abord observer le comportement d'un dé qui est supposé équiprobable. Comme ca, on a une idée générale des résultats qu'on attend de notre dé final qui n'est pas standard.

FIGURE 1 – Voici le dé d'un jeu de société

On a choisi le dé sur la figure pour effectuer un certain nombre de lancements et d'essais. Après avoir fait les lancements sur le tapis et la table, on a fait une synthèse des données obtenues, et conclut qu'il vaut mieux effectuer les lancements sur le tapis que sur la table.(voir 7.2)

Commme deuxième étape, on a construit des corps, plus particulièrement des solides de Platon comme le dodécaèdre et icosaèdre, dans un logiciel qui était bien connu pour nous, Geogebra.
On les a construits en dimension 3 pour se familiariser avec telles constructions. Après, on a construit les mêmes solides dans le logiciel Fusion360 qui est plus performant en ce qui concerne l'imprimante 3D.
On a imprimé ces dés, avec des propriétés sur l'épaisseur du fils par exemple et le remplissage pour voir si elles restent conformes au fait que le dé soit équilibré ce qui était effectivement le cas.

En dernier lieu, on a fait plusieurs essais avec différents dés qui ont également été construits dans Fusion360, pour enfin trouver un dé qui est équilibré.

4 Matériaux/Outils

Les outils dont on avait besion pour la réalisation étaient les suivants :

1. On a utilisé un dé d'un jeu de société.
2. Le logiciel Excel pour construire les différents tableaux des effectifs et les graphiques.
3. Geogebra pour la construction do dodécaèdre et de l'icosaèdre.
4. Fusion360 pour la construction du dodécaèdre et de l'icosaèdre.
5. Le logiciel Cura, qui est indispensable pour imprimer les dés en 3D.
6. Imprimente 3D " Ultimaker 3 "

5 Outils mathématiques

Les outils mathématiques dont on avait besoin pour la réalisation étaient les suivants :

1. On a utilisé le test du χ^2 pour vérifier si un dé est équilibré ou pas.
2. Le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de raisonner pour trouver un dé non-standard mais équiprobable.
3. Calcul de probabilités

6 Quelques Rappels

6.1 Calcul de probabilités

La probabilité est la théorie des phénomènes aléatoires et a pour but la description mathématique du hasard.
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance.
Dans notre cas ici, on a besoin que de quelques notions de base pour effectuer un certain test (du χ^2).
Comment déterminer les probabilités ? Par exemple par l'approche fréquentielle. On répète une expérience n fois de façon indépendante :

Soit A un évènement

$$f_n(A) = \text{(nombre de fois où A se réalise)}/n$$

(Il s'agit de la fréquence empirique de A)

Alors

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} f_n(A)$$

6.2 Le théorème des valeurs intermédiares

<u>Énoncé</u> :

Pour toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\forall$ u $\in [f(a), f(b)]$,
il existe au moins un c $\in \mathbb{R}$ compris entre a et b tel que $f(c) = u$

<u>Preuve</u> :(topologique)

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. L'ensemble de départ est donc un connexe.
L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe.
Donc l'image par f de $[a, b]$ est un intervalle, ce qui démontre le théorème.

6.3 Test du χ^2

À la base d'un test de statistique classique, il y a formulation d'hypothèse appelée hypothèse nulle (ou hypothèse zéro), notée $H0$. Elle suppose que les données considérés proviennent de variables aléatoires suivant une loi de probabilité donnée, et l'on souhaite tester la validité de cette hypothèse.

Ces données ayant été réparties en classes, il faut :

— Se donner a priori un risque d'erreur, celle consistant à rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie (la valeur 5est souvent choisie par défaut ; on parle d'un choix arbitraire) ;

— Déterminer le nombre de degrés de liberté du problème à partir du nombre de classes, et à l'aide d'une table de χ^2, déduire, en tenant compte du nombre de degrés de liberté, la distance critique qui a une probabilité de dépassement égale à ce risque ;

— Calculer algébriquement la distance entre les données observées et les données théoriques attendues.

7 Procédure

7.1 Premier Essai

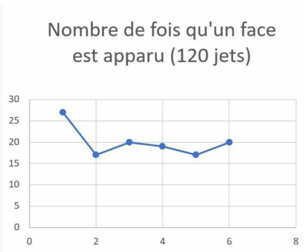
7.1.1 Approche expérimentale

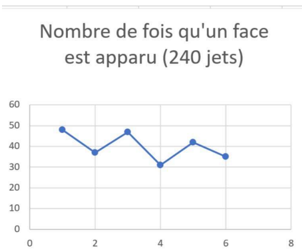
Ayant décidé de faire des jets ave le dé sur la figure(1), on a effectué trois séries de jets et on les a " analysés ". On a fait des graphiques pour chaque série de jets pour les comparer à la fin.

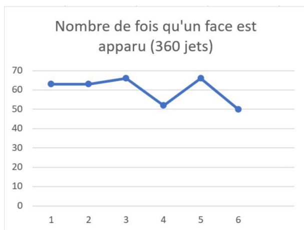
De plus, on a fait des jets sur la table et aussi sur le tapis pour voir si différentes surfaces ont des impacts sur le résultats et sur l'équiprobabilité de notre dé.

Voilà les résultats des 3 séries de jets sur le tapis :

<u>Idée :</u>
Le nombre de fois qu'un face apparait se rapproche de $\frac{1}{6}$*(nombre de total de lancements) , ce qui correspond au calcul de probabilité vu dans le rappel.



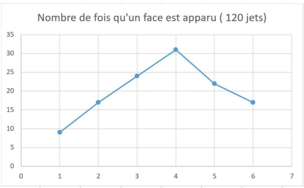


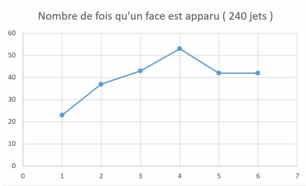


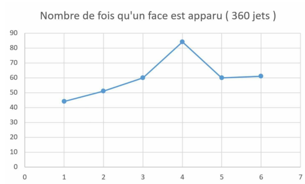
<u>Conclusion :</u>
Par observation des 3 graphiques on peut dire que les répartitions se comportent de manière relativement semblable (reste plus ou moins dans l'intervalle $\frac{1}{6}*$ nombre de jets), et que notre estimation que la probabilité de chacune des surfaces se rapproche à $\frac{1}{6}$ reste valable.

Voilà les résultats des 3 séries de jets sur la table :

Idée :
Le nombre de fois qu'un face apparait se rapproche de $\frac{1}{6}$*(nombre total de lancements), ce qui correspond au calcul de probabilité vue dans le rappel.







Conclusion :
Par observation des 3 graphiques on peut dire que les répartitions se comportent de manière similaire, et que notre estimation que la probabilité de chacune des surfaces se rapproche à $\frac{1}{6}$ reste valable.

7.2 Approche calculatoire

Afin de préciser et quantifier nos observations, on présente ici une approche plus systématique et plus crédible en ce qui concerne la conclusion que notre dé soit équilibré ou pas.

<u>Jets sur la table</u>

Face	Nombre de fois
1	9
2	17
3	24
4	31
5	22
6	17
Total	120

Il est clair que la probabilité qu'un face est de 1/6.
L'effectif théorique est égal à 20 pour chaque face ($= 1/6 * 120$)
Calculons :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{((x_i - \text{eff.théorique})^2)}{(\text{eff. théorique})}$$

On a : $u = (9-20)^2/20 + (17-20)^2/20 + (24-20)^2/20 + (31-20)^2/20$
$+(22-20)^2/20 + (17-20)^2/20 = 14$ (notre χ^2-calculé)

Comparons-le à notre χ^2-théorique à l'aide de la table du χ^2.

Notre degré de liberté est égal à n-1 avec n=6 le nombre de face, c'est-à-dire $6 - 1 = 5$ et le risque est égal à 0,05 ou bien 5%.

Table du χ^2

k	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.94	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.81	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

FIGURE 2 – Table du χ^2 indiquant le χ^2 théorique du degré de liberté et du risque

On se concentre sur la ligne oú k=5 compte tenu de notre degré de liberté et compte tenu du risque (par défaut pris), qui est 5%.
On voit que le χ^2-théorique est 11,07 et le χ^2 calculé est 14.
Soit A = le χ^2-théorique et B = χ^2-calculé
Comme A<B, on rejette l'hypothèse que notre dé est équilibre.

On procède de la même manière pour les autres séries de lancements

Face	Nombre de fois
1	23
2	37
3	43
4	53
5	42
6	42
Total	240

effectif théorique = 80
u=12,1 (=B)
Et on a toujours B>A
⇒ On rejette l'hypothèse

Face	Nombre de fois
1	44
2	51
3	60
4	84
5	60
6	61
Total	360

effectif théorique = 60
u=15,23 (=B)
Et on a toujours B>A
⇒ On rejette l'hypothèse

lancements sur le tapis :

Face	Nombre de fois
1	27
2	17
3	20
4	19
5	17
6	20
Total	120

effectif théorique = 20
u=3,4 (=B)
Et on a toujours B<A
⇒ Notre dé est équilibré

Face	Nombre de fois
1	48
2	37
3	47
4	31
5	42
6	35
Total	240

effectif théorique = 40
u=5,8 (=B)
Et on a toujours B<A
⇒ Notre dé est équilibré

Face	Nombre de fois
1	63
2	63
3	66
4	52
5	66
6	55
Total	360

effectif théorique = 60
u=4,23 (=B)
Et on a toujours B<A
⇒ Notre dé est équilibré

Conclusion :

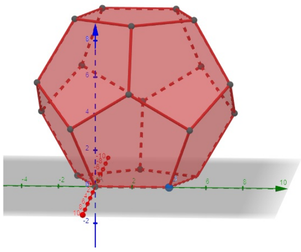
Comme notre dé est bien équilibré quand on effectue les lancements sur le tapis, on va effectuer les prochains lancements de même manière, c'est-à-dire aussi sur le tapis.

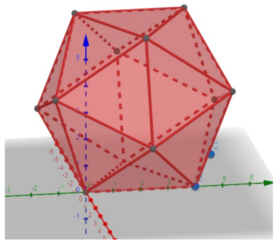
En ce qui concerne les jets sur la table,il se peut que les lancements n'ont pas été effectué de même manière, certains ont été plus courts ou longs que les autres, par exemple à cause des bruits etc.

7.3 Icosaèdre et Dodécaèdre

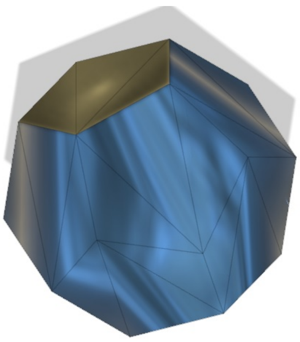
7.3.1 Icosaèdre et Dodécaèdre dans GeoGebra

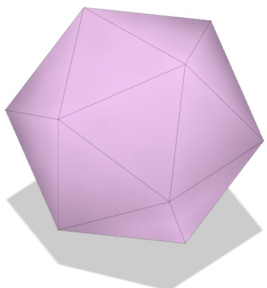
Voici les figures qu'on a crée dans le logiciel Geogebra :





7.3.2 Icosaèdre et Dodécaèdre dans Fusion360





On a utilisé ces modèles du Dodécaèdre et Icosaèdre pour pouvoir les imprimé en 3D.

7.3.3 Les solides de Platon

On a décidé d'imprimer un solide de Platon(dodécaèdre,icosaèdre,etc) parce qu'on sait bien qu'un solide de Platon est équilibré.

En fait, un dé est équilibré, si toutes les surfaces peuvent apparaitre le meme nombre de fois. Ceci est le cas, si toutes les faces ont les memes dimensions. Les solides de Platon sont alors des dés équilibrés, parce qu'ils remplissent ces conditions.En effet, tous les angles sont égaux, et ainsi aussi les surfaces. Pour résumer, les solides de Platon ont un haut degré de symmétrie. Ainsi on peut conclure, que les arrêtes, les sommets et les faces sont tous équivalents et donc il s'agit d'un dé équilibré.

La raison pour laquelle on a imprimé un solide de Platon est, parce, comme déjà expliqué, on sait que c'est un dé équibrobable. Le but dans cette phase est alors simplement, de déterminer les propriétés de l'imprimente (densité, matériel,hauteur,...) afin que nos résultats soient correctes et pas manipulés.

7.3.4 Vérification du Dodécaèdre avec le test du χ^2

Voici les résultats des lancements, qu'on a fait avec le Dodécaèdre.

Face	Nombre de fois
1	6
2	7
3	10
4	10
5	9
6	6
7	9
8	11
9	11
10	16
11	14
12	11
Total	120

Dans ce cas nous avons que l'effectif théorique $=\frac{1}{12} * 120 = 10$

Puis calculons : $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{((x_i - \text{eff.théorique})^2)}{(\text{eff. théorique})}$

Donc nous obtenons que u=9,8 , ce qui est notre khi^2 calculé.
Par la table du χ^2, nous savons que χ^2 théorique est égal à 19,67 et comme 9,8<19,67 nous pouvons conclure que ce dé est équiprobable.

Comme on sait que le Dodécaèdre est équiprobable, les seules choses qui pourraient le déséquilibrer sont les propriétés choisies lors de l'impression.

Les propriétés qu'on a choisi sont :

- Le meille de remplissage qu'on a utilisé est le vide ;
- Le material de construction était le PVC (standard matérial utlisisé pour imprimer des petits objets) ;
- La forme de base était un pentagone d'un rayon de $50mm$ (pour les autres objets la forme de base était un hexagone avec un rayon de $50mm$) et la hauteur de l'objet final était $100mm$ pour l'imprimer on a reduit l'objet à 30% de sa taille total.

Dans notre cas, avec les propriétés choisies le test nous confirme que le dé est équiprobable.

On conclut ici alors, qu'on va utiliser les mêmes propriétés pour tous les dés qu'on va créer comme on les a choisie ici.

7.4 Phase Finale

Dans cette section finale, on veut résoudre le problème comment trouver et construire un dé non standard mais équilibré.

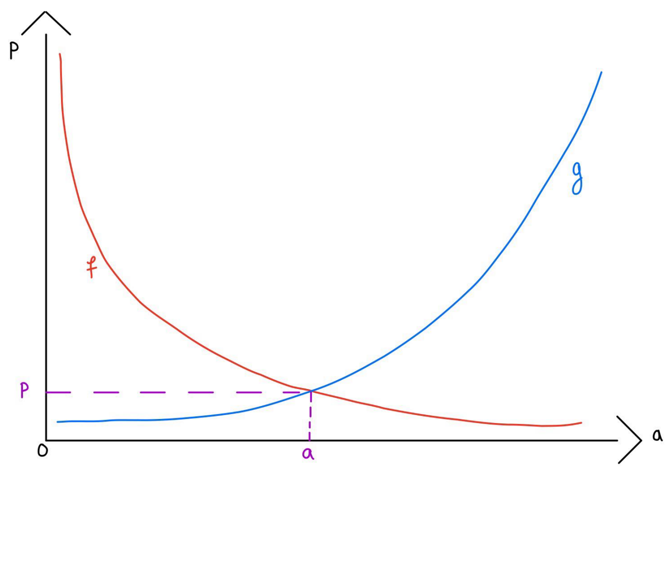
Suivant l'idée générale suivante, on a cherché un dé éqilibré :

D'abord, on a construit un hexagone avec un rayon de 50mm, qui va former la base de notre dé. En fait, l'idée ici c'est qu'on forme un prisme hexagonal. On le construit avec des différentes hauteurs qu'on nomme a.

Ce qu'on fait c'est :

On imrpime un prisme hexagonal avec une certaine hauteur a, après un autre avec une hauteur a différente et on regarde ce que le test du χ^2 nous dit sur l'hypothèse que le " dé " soit équilibré.
Disons, on trouve pour la hauteur $a = x$ que le dé n'est pas équilibré, et pour la hauteur $a = 5x$ que le dé est non plus équilibré, on peut se demander qu'est ce qui se passe entre ces 2 hauteurs.
Il y a deux situations qui peuvent se présenter : Soit il y a un point d'intersection de la fonction de répartition des 2probabilités P (voir en dessous) pour les deux hauteurs, soit il y en a pas.

Pour expliquer un peut cette démarche, voici quelques données et un graphique :



Sur l'axe des ordonnées :

P est :
- la probabilité que les deux faces qui ont la forme du hexagone apparaissent
- la probabilité que les 6 autres faces entre les 2 forme hexagonale apparaissent

Sur l'axe des abscisses :

a est la hauteur.

La fonction g est la réprésentation graphique qui réprésente la probabilité qu'une des six faces hexagonales apparaît lors d'un lancement en fonction de la variable a.
La fonction f est la réprésentation graphique qui réprésente la probabilité qu'une des deux faces rectangulaires apparaît lors d'un lancement en fonction de la variable a.
Par observation, on a que notre dé se comporte, regardant la probabilité, comme une pièce avec 2 faces quand a tend vers zéro, parce que la valeur de a donne une hauteur à notre faces rectangulaires.
Par contre, la probabilité qu'une des deux faces hexagonales apparaît tend vers 0 si a tend vers l'infini, parce que dans cette cas l'énorme grandeur de a néglige la taille des faces hexagonales et seulement les faces rectangulaires peuvent apparaître.
Alors on en déduit que :

$$\lim_{a \to 0} g(a) = 0 \qquad \lim_{a \to +\infty} g(a) = 1$$

$$\lim_{a \to 0} f(a) = 1 \qquad \lim_{a \to +\infty} f(a) = 0$$

On peut alors par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f - g$ trouver un point d'intersection de f et g entre 0 et a,ou les probabilités des deux fonctions vont être égales et alors le dé est équilibré. Cela on peut conclure si le test du χ^2 confirme notre hypothèse que le dé est équilibré.

Par la suite on montre quelques calculs, qu'on a dû faire pour trouver un dé non-standard mais équilibré.
On va présenter deux calculs pour s'approcher à notre but et le résultat final.

Voiciles deux calculs :

Si a=50mm :

Comme nous utilisons une forme hexagonale comme base, rappelons qu'en élévant la hauteur on obtient 8 faces, les faces 1 et 8 sont les faces hexagonales et les faces 2,3,4,5,6 et 7 sont les faces rectangulaires, cette numérotation sera la même pour tous les dés utilisés.

Face	Nombre de fois
1	32
2	11
3	8
4	7
5	14
6	8
7	9
8	39
Total	128

Alors on a comme effectif théorique $=\frac{1}{8} * 128 = 16$

Puis calculons : $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{((x_i - \text{eff.théorique})^2)}{(\text{eff. théorique})}$

D'où on trouve que u=67 , ce qui est notre χ^2 calculé.
Par la table du χ^2, nous savons que χ^2 théorique est égal à 14,07 et comme 14,07<67,on rejète l'hypothèse que le dé est équilibré.

Calculons maintenant la probabilité de deux évènements A et B. Soit A l'évènement d'obtenir les faces 1 ou 8 (les deux faces hexagonales) et soit B l'évènement d'obtenir les faces 2,3,4,5,6 ou 7 (les six faces non-hexagonales).

$$P(A) = \frac{32+39}{32+11+8+7+14+8+9+39} = \frac{71}{128} \simeq 0,5547$$

$$P(B) = \frac{11+8+7+14+8+9}{32+11+8+7+14+8+9+39} = \frac{57}{128} \simeq 0,4453$$

Regardons une fois qu'on a dû obtenir si le dé serait équilibré.

$$P_{\text{théo.}}(A) = \frac{2}{8} = 0,25$$
$$P_{\text{théo.}}(B) = \frac{6}{8} = 0,75$$

Par comparaison, on a que $P_{\text{théo.}}(A) < P(A)$ et $P_{\text{théo.}}(B) > P(B)$.

Si a=100mm :

Voici les résultats des lancements :

Face	Nombre de fois
1	6
2	9
3	20
4	18
5	14
6	27
7	17
8	9
Total	120

Alors on a comme effectif théorique $=\frac{1}{8} * 120 = 15$

Puis calculons, comme dans le cas précédent : $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{((x_i - \text{eff.théorique})^2)}{(\text{eff. théorique})}$

D'où on a que u=22,4 , ce qui est notre khi^2 calculé.
On a ici que 14,07<22,4,c'est-à-dire le test du khi^2 n'est pas satisfait et donc le dé n'est pas équilibré.

Calculons maintenant la probabilité de deux évènements A et B définie comme dans le cas, où a= 50mm.

$$P(A) = \frac{6+9}{6+9+20+18+14+27+17+9} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$P(B) = \frac{9+20+18+14+27+17}{6+9+20+18+14+27+17+9} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Comparons maintenant les valeurs trouvées avec les valeur théorique si le dé serait équiprobable.

Dans ce cas, on a que $P_{\text{théo.}}(A) > P(A)$ et $P_{\text{théo.}}(B) < P(B)$.

Observons les résultats obtenus pour les deux valeurs de a :

Si a=50 mm alors ona que $P_{\text{théo.}}(A) < P_a(A)$ et $P_{\text{théo.}}(B) > P_a(B)$

Si a=100 mm alors ona que $P_{\text{théo.}}(A) > P_a(A)$ et $P_{\text{théo.}}(B) < P_a(B)$

Alors on a que

$$P_{a=50}(A) > P_{\text{théo.}}(A) > P_{a=100}(A)$$

et

$$P_{a=50}(B) < P_{\text{théo.}}(B) < P_{a=100}(B)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe a$\in [50, 100]$ tel que,

$$P_a(A) = P_{\text{théo.}}(A) \quad \text{et } P_a(B) = P_{\text{théo.}}(B)$$

Résultat final :

Après un certain nombre d'essais, on a trouvé que le dé avec la hauteur a=90mm est équilibré.

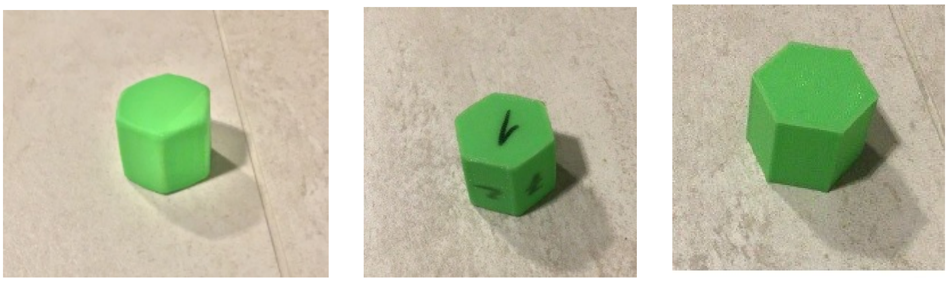


FIGURE 3 – Pour les calculs et l'expérience on a utilisé le dé au milieu

Voici les résultats de lancements :

Face	Nombre de fois
1	13
2	7
3	11
4	8
5	12
6	15
7	12
8	10
Total	88

Comme effectif théorique on a $\frac{1}{8} * 88 = 11$

Maintenant calculons : $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{((x_i - \text{eff.théorique})^2)}{(\text{eff. théorique})}$

D'où on a que u$\simeq 4,363$, ce qui est notre χ^2 calculé.
Par la table du χ^2, nous savons que χ^2 théorique est égal à 14,07 et comme 14,07>4,363, c'est-à-dire le test du χ^2 est satisfait et donc le "dé hexagonal " avec une hauteur de 90mm est équilibré.

Soit A et B les mêmes évènements comme dans les calcules paravant. En plus,on a que

$$P_{\text{théo.}}(A) \simeq P_{a=90}(A) = 0,261$$
et
$$P_{\text{théo.}}(B) \simeq P_{a=90}(B) = 0,739$$

Enfin, on peut dire que ce dé est non-standard mais équilibré.

8 Conclusion

À la fin, on peut dire en utilisant le théorème des valeurs intermédiares, des simples calculs de la probabilité et le test du χ^2 et avec un certain nombre de calculs et d'essais, on peut trouver un dé non-standard mais équilibré. Même si nous avons trouvé que $P_a(A) \simeq P_{\text{théo.}}(A)$ et $P_a(B) \simeq P_{\text{théo.}}(B)$, il s'agit d'une différence dans l'ordre 10^{-3} et d'une expérience, donc il faut dire qu'on est assez proche de la valeur théorique et pour citer H.L.Mencken :" Il est dans la probabilité que mille choses arrivent qui sont contraires à la probabilité".

FIGURE 4 – Tous les dés qu'on a testé

9 Références

— https ://de.wikipedia.org/wiki/Chi-Quadrat-Test
— http ://math.uni.lu/thalmaier/
— https ://fr.wikipedia.org/wiki