

EML 3 : Ensembles limite et groupes de Schottky

Inas BOSCH, Yanis BOSCH

29 mai 2020

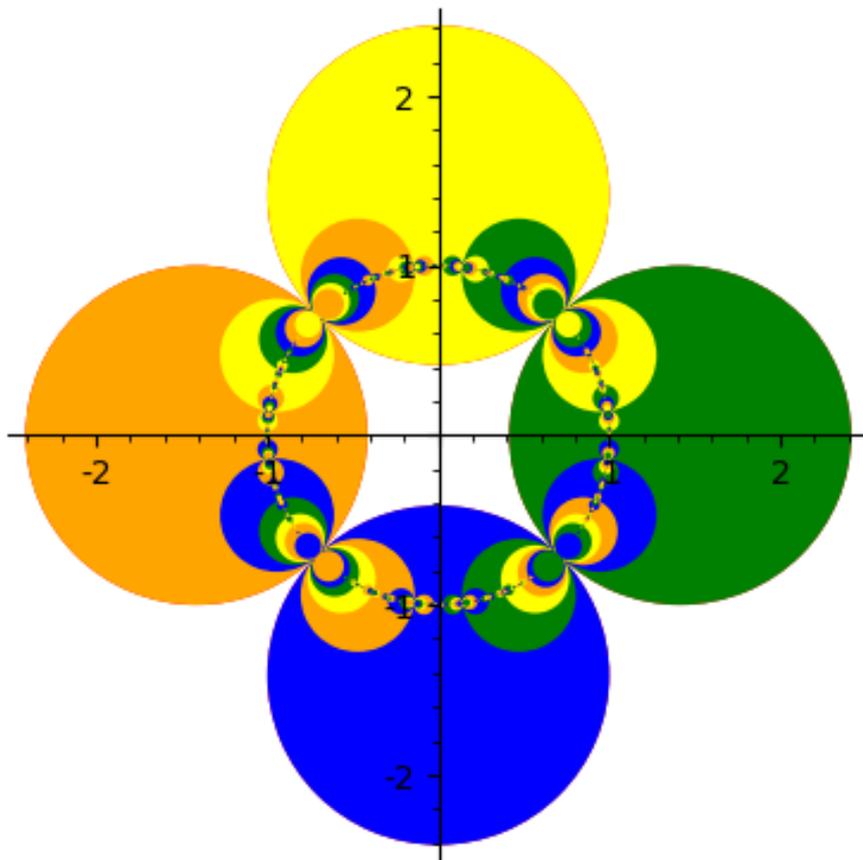


Table des matières

1	Théorie	3
1.1	Introduction aux homographies dans $\hat{\mathbb{C}}$	3
1.2	Le birapport	4
1.3	Étude de l'homographie $A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}; z \mapsto -\frac{1}{z}$	6
1.3.1	Image de droites passant par l'origine	6
1.3.2	Image d'une droite ne passant pas par l'origine	7
1.3.3	L'image d'un cercle passant par l'origine	9
1.3.4	L'image d'un cercle ne passant pas par l'origine	9
1.4	Groupes de Schottky	11
2	Expérimentation	13
2.1	Premières Intuitions	13
2.2	Premières Experiences sur Python	13
2.3	Premier calcul de l'image d'une droite verticale	15
2.4	Image d'une droite quelconque ne passant pas par l'origine	15
2.5	Images des droites passant par l'origine et de tout cercle	16
2.6	Exploitation des résultats	17
2.7	Dessins de groupes de Schottky	18
2.7.1	Premier groupe de Schottky	18
2.7.2	Le groupe θ -Schottky	20
3	Programmation	21
3.1	Premier programme en <i>Python</i>	21
3.2	Avantages et désavantages du programme	22
3.2.1	Avantages	22
3.2.2	Désavantages	22
3.3	Programme en <i>Sagemath</i>	23
3.4	Groupes de Schottky	24

1 Théorie

1.1 Introduction aux homographies dans $\hat{\mathbb{C}}$

Définition 1.1. La *sphère de Riemann*, dénotée par $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, est l'espace topologique qui ajoute le point $\{\infty\}$ à \mathbb{C} . La sphère de Riemann est homéomorphe à S^2 .

Définition 1.2. Une *homographie* est une transformation T de la sphère de Riemann :

$$T : \begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \rightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \quad (1)$$

sous condition que :

$$ad - bc \neq 0 \quad (2)$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Remarque 1.1. En définissant T comme en (1), on peut poser :

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ nous notons :

$$Az = \frac{az+b}{cz+d} \quad (3)$$

Ici la condition $\det A \neq 0$ est équivalente à (2). On remarque que $\forall t \in \hat{\mathbb{C}}$:

$$(tA)z = \frac{taz+tb}{tcz+td} = \frac{t(az+b)}{t(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = Az \quad (4)$$

Proposition 1.1. On peut représenter toute homographie $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ par une matrice de $SL_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit

$$T : \begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \rightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

une telle homographie. On sait que :

$$\det(tA) = \det \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix} = t^2 ad - t^2 bc = t^2 \det(A)$$

On cherche un $t \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\det(tA) = 1 \iff t^2 \det(A) = 1 \quad (5)$$

Or :

$$\det A \neq 0 \quad (6)$$

Ainsi :

$$(5) \stackrel{(6)}{\iff} t^2 = \frac{1}{\det A}$$

Ainsi on trouvera toujours $t \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in \hat{\mathbb{C}} : (tA)z = Az \quad \wedge \quad tA \in SL_2(\mathbb{C})$$

□

Remarque 1.2. Par convention on pose :

$$A(\infty) = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{R}}} Az \quad (7)$$

Proposition 1.2. $SL_2(\mathbb{C})$ est un groupe.

Démonstration. On doit vérifier trois conditions :

1. L'élément neutre :

On pose :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'élément neutre de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. On a $\det(I_2) = 1$, donc $(I_2) \in SL_2(\mathbb{C})$.

2. L'élément inverse :

Soit $A \in SL_2(\mathbb{C})$. Alors $\det A = 1$, donc A est inversible. Or :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$$

Ainsi $A^{-1} \in SL_2(\mathbb{C})$.

3. Fermé par composition :

On a :

$$\det AB = \det(A) \det(B) = 1 \quad \forall A, B \in SL_2(\mathbb{C})$$

Ainsi $\forall A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ on a $AB \in SL_2(\mathbb{C})$.

Ainsi $SL_2(\mathbb{C})$ est un groupe. □

1.2 Le birapport

Définition 1.3. Soient a, b, c et $d \in \hat{\mathbb{C}}$. Le birapport de a, b, c et d est le produit :

$$\frac{a - c}{a - d} \frac{b - d}{b - c}$$

Le birapport est noté $B(a, b, c, d)$.

Proposition 1.3. Soient a, b, c et $d \in \hat{\mathbb{C}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $B(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$

(ii) a, b, c et d sont cocycliques ou alignés

Démonstration. Résultat admis □

Proposition 1.4. Les homographies préservent le birapport.

Démonstration. Soient x, y, z et $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Alors :

— $B\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = B(x, y, z, w)$. En effet :

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{w}} \cdot \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{w}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{z}} \cdot \frac{xzw}{xzw} \cdot \frac{yzw}{yzw} \\ &= \frac{zw - xw}{zw - xz} \frac{zw - yz}{zw - yw} \\ &= \frac{\cancel{z}(z - x)}{\cancel{z}(w - x)} \frac{\cancel{z}(w - y)}{\cancel{z}(z - y)} \\ &= B(x, y, z, w) \end{aligned}$$

— $B(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w) = B(x, y, z, w)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. En effet :

$$\begin{aligned} B(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w) &= \frac{\alpha x - \alpha z}{\alpha x - \alpha w} \frac{\alpha y - \alpha w}{\alpha y - \alpha z} \\ &= \frac{\cancel{\alpha}(x - z)}{\cancel{\alpha}(x - w)} \frac{\cancel{\alpha}(y - w)}{\cancel{\alpha}(y - z)} \\ &= B(x, y, z, w) \end{aligned}$$

— $B(x + \beta, y + \beta, z + \beta, w + \beta) = B(x, y, z, w)$ avec $\beta \in \mathbb{C}$. En effet :

$$\begin{aligned} B(x + \beta, y + \beta, z + \beta, w + \beta) &= \frac{x + \beta - z - \beta}{x + \beta - w - \beta} \frac{y + \beta - w - \beta}{y + \beta - z - \beta} \\ &= B(x, y, z, w) \end{aligned}$$

Soit $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}; z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $c \neq 0$ une homographie. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall z \in \hat{\mathbb{C}} : T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &\stackrel{ad-bc=1}{=} \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz + d)} \end{aligned}$$

Si $c = 0$, l'homographie est de la forme :

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

Ainsi T est une composition d'homographies de forme $\frac{1}{z}$, αz et $z + \beta$. Vu qu'elles préservent le birapport, T le préserve aussi. \square

Proposition 1.5. *Les homographies envoient les cercles et droites sur des cercles et droites.*

Démonstration. On obtient ce résultat en utilisant les propositions 1.3 et 1.4. \square

1.3 Étude de l'homographie $A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}; z \mapsto -\frac{1}{z}$

On pose :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\det(A) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$. Ainsi $A \in SL_2(\mathbb{C})$. De plus $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}, Az = -\frac{1}{z}$.

1.3.1 Image de droites passant par l'origine

Soit d une droite dans $\hat{\mathbb{C}}$ passant par l'origine. L'ensemble des points de cette droite pourra s'écrire sous la forme, où θ est l'angle formé par la droite et l'axe des réels :

$$D = \{t \cdot e^{i\theta} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

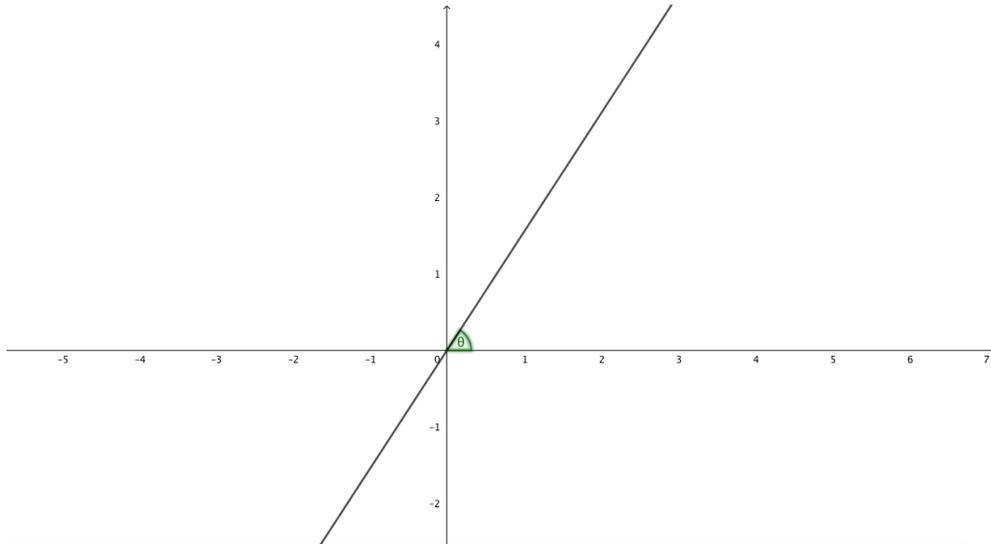


FIGURE 1 – Droite passant par l'origine formant un angle θ avec l'axe des réels.

Notons D' l'ensemble des points obtenu en appliquant A aux points de D :

$$\begin{aligned} D' &= \{A(t \cdot e^{i\theta}) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{t} \cdot e^{-i\theta} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

L'on remarque que D' est l'ensemble des points de la droite passant par l'origine formant un angle de $-\theta$ rad avec l'axe des réels.

Dans la définition de l'ensemble D' on remarque que pour $t \rightarrow \infty$, $-\frac{1}{t} \cdot e^{-i\theta}$ va s'approcher de l'origine mais ne l'atteindra pas. Il faut ainsi supposer que le point infini $\{\infty\}$ appartient à la droite d , et ceci $\forall \theta$, afin que l'origine appartienne à l'image de d par A .

Sous cette hypothèse on a alors que l'image par A de notre droite d est la droite passant par l'origine formant un angle de $-\theta$ rad avec l'axe des réels. Ceci nous permet de formuler la proposition suivante :

Proposition 1.6. *L'image de toute droite passant par l'origine formant un angle θ avec l'axe des réels est une droite passant également par l'origine mais formant un angle $-\theta$ avec l'origine.*

Démonstration. La preuve découle immédiatement du développement précédent. \square

Remarque 1.3. On remarque que A envoie une droite passant par l'origine sur sa symétrie par rapport à l'axe des réels.

1.3.2 Image d'une droite ne passant pas par l'origine

Soit D une droite quelconque ne passant pas par l'origine. Cette droite pourra alors être caractérisée uniquement par sa distance à l'origine $a > 0$ et l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ qu'elle forme avec l'axe des réels.

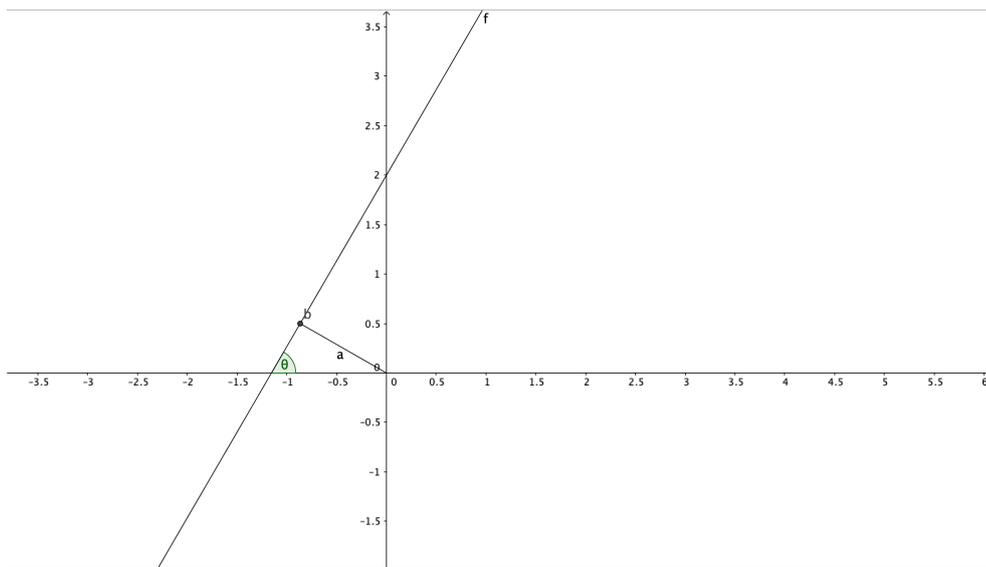


FIGURE 2 – Droite passant à une distance a de l'origine et formant un angle θ avec l'axe des réels.

Soit $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $d(0, b) = a$. Car la droite passant par b et 0 est perpendiculaire à D on obtient le résultat suivant :

$$b = a \cdot e^{i(\pi/2+\theta)} \quad (8)$$

Ainsi on peut écrire tout point de la droite sous la forme :

$$\begin{aligned} D(t) &= b + t \cdot e^{i\theta} \\ &\stackrel{(8)}{=} a \cdot e^{i(\pi/2+\theta)} + t \cdot e^{i\theta} \\ &= (a \cdot i + t) \cdot e^{i\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{D(t)} &= -\frac{1}{ai+t}e^{-i\theta} \\
&= -\frac{1}{ai+t} \frac{t-ai}{t-ai} e^{-i\theta} \\
&= \frac{1}{t^2+a^2} (a \cdot ie^{-i\theta} - te^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{t^2+a^2} (ae^{i(\pi/2-\theta)} - te^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{2a} e^{i(\pi/2-\theta)} - \left(\frac{1}{2a} - \frac{a}{t^2+a^2} \right) e^{i(\pi/2-\theta)} - \frac{t}{t^2+a^2} e^{-i\theta} \\
&= \frac{1}{2a} e^{i(\pi/2-\theta)} + \left(\frac{a^2-t^2}{2a(t^2+a^2)} \right) e^{i(\pi/2-\theta)} - \frac{t}{t^2+a^2} e^{-i\theta} \\
&= \frac{1}{2a} e^{i(\pi/2-\theta)} + \left(\frac{a^2-t^2}{2a(t^2+a^2)} e^{i\pi/2} - \frac{t}{t^2+a^2} \right) e^{-i\theta} \\
&= \frac{1}{2a} e^{i(\pi/2-\theta)} + \left(\frac{i(a^2-t^2) - 2at}{t^2+a^2} \right) \frac{1}{2a} e^{-i\theta}
\end{aligned}$$

Posons alors :

$$\begin{aligned}
m(t) &:= \frac{i(a^2-t^2) - 2at}{t^2+a^2} \\
\hat{b} &= \frac{1}{2a} e^{i(\pi/2-\theta)}
\end{aligned}$$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\|m(t)\|^2 &= \frac{4a^2t^2 + (a^2-t^2)^2}{(t^2+a^2)^2} \\
&= \frac{t^4 + 2a^2t^2 + a^4}{(t^2+a^2)^2} \\
&= \frac{(t^2+a^2)^2}{(t^2+a^2)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc tout point de l'image de D par A , dénotée par D' , s'écrit sous la forme :

$$\hat{b} + m(t) \frac{1}{2a} e^{-i\theta}$$

Ainsi tout point de D' se situe à une distance $\|m(t) \frac{1}{2a} e^{-i\theta}\| = \frac{1}{2a}$ de \hat{b} . Or D' contient au moins 3 points distincts équidistants à \hat{b} . Par conséquent D' n'est pas une droite, et doit par la proposition (1.4) être un cercle. Par les calculs précédents ce cercle est de centre \hat{b} et de rayon $\frac{1}{2a}$.

Proposition 1.7. *L'image d'une droite formant un angle θ avec l'axe des réels passant à une distance $a > 0$ de l'origine est un cercle de centre $\frac{1}{2a} e^{i(\pi/2-\theta)}$ et de rayon $\frac{1}{2a}$.*

Démonstration. La preuve découle directement du raisonnement précédent. \square

Remarque 1.4. L'image par A d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle passant par l'origine.

1.3.3 L'image d'un cercle passant par l'origine

Lemme 1.1. $A(z) = A^{-1}(z)$

Démonstration. La preuve découle du fait que $A(A(z)) = z$. □

Remarque 1.5. Par le lemme précédent, afin de trouver l'image d'un cercle passant par l'origine, il suffit de trouver sa préimage.

Soit C un cercle passant par l'origine, de rayon $r > 0$ et de centre c . Vu que ce cercle passe par l'origine, $\exists \theta \in [0, 2\pi]$ t.q. $c = re^{i\theta}$.

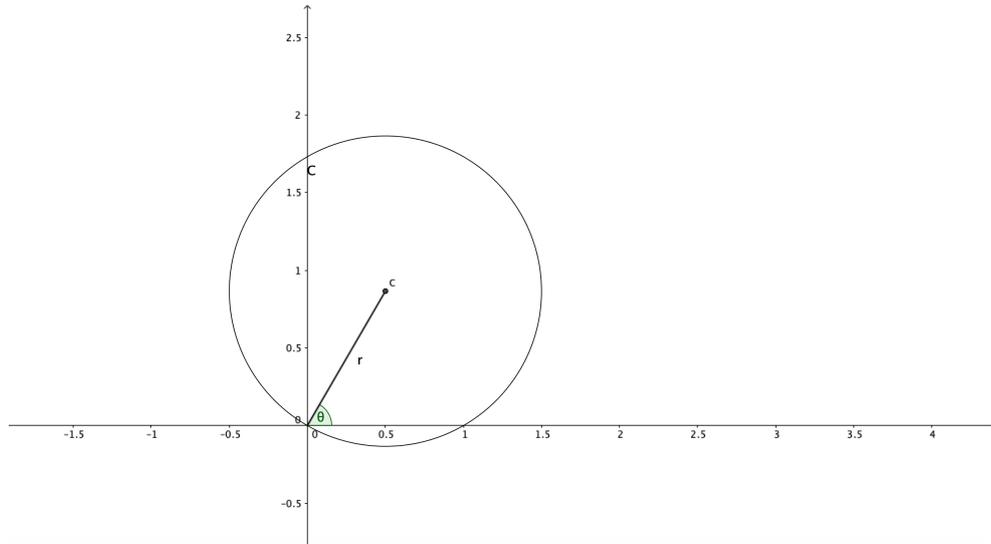


FIGURE 3 – Cercle de rayon r passant par l'origine.

Ainsi par la proposition (1.7), l'image de la droite passant à une distance $\frac{1}{2r}$ de l'origine et formant un angle de $\frac{\pi}{2} - \theta$ par rapport à l'axe des réels est le cercle C . L'image de C par A est donc la droite décrite auparavant.

Proposition 1.8. *L'image d'un cercle de rayon $r > 0$ et de centre $c = re^{i\theta}$ est la droite passant à une distance $\frac{1}{2r}$ de l'origine et formant un angle de $\frac{\pi}{2} - \theta$ par rapport à l'axe des réels.*

Démonstration. La preuve découle directement du raisonnement précédent. □

1.3.4 L'image d'un cercle ne passant pas par l'origine

On veut trouver l'image du cercle C de centre $z_0 = de^{i\theta}$, où $d \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$. Ce cercle ne doit pas passer par l'origine, donc on suppose $d \neq r$.

Soit $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto de^{i\theta} + re^{it}$. Alors φ est un paramétrage de C . On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= (d+r)e^{i\theta} \Rightarrow \frac{-1}{\varphi(\theta)} = \frac{-e^{-i\theta}}{d+r} := a_1 \\ \varphi(\theta + \pi) &= (d-r)e^{i\theta} \Rightarrow \frac{-1}{\varphi(\theta + \pi)} = \frac{-e^{-i\theta}}{d-r} := a_2 \end{aligned}$$

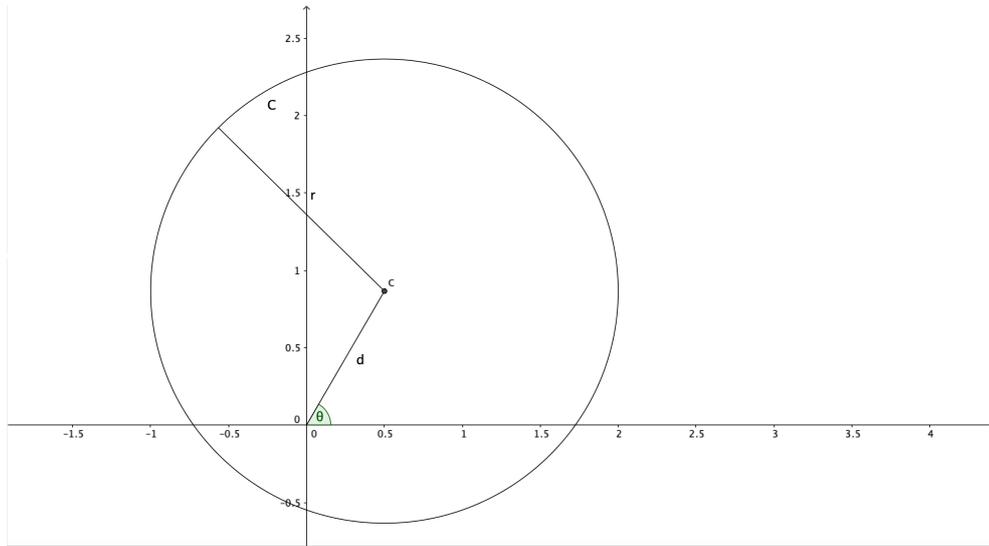


FIGURE 4 – Cercle de rayon r à distance r l'origine.

Par le lemme 1.1 et grâce aux résultats trouvés pour les droites, on peut conclure que l'image de C par A est un cercle.

On suppose que a_1 et a_2 sont diamétralement opposés sur l'image de C . Alors l'image de C a comme centre :

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{a_1 + a_2}{2} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d+r} + \frac{1}{d-r} \right) e^{-i\theta} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{d - r + d + r}{d^2 - r^2} e^{-i\theta} \\
 &= \frac{-de^{-i\theta}}{d^2 - r^2}
 \end{aligned}$$

On cherche un troisième point de l'image de C équidistant à c afin de prouver qu'il s'agit bien du centre de cette image.

On a :

$$\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = (d+ri)e^{i\theta} \Rightarrow \frac{-1}{\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-e^{-i\theta}}{d+ri} := a_3$$

On vérifie alors si ces trois points sont sur un cercle de centre c . En effet :

$$\begin{aligned}
|a_1 - c|^2 &= \left| \left(\frac{1}{d+r} - \frac{d}{d^2-r^2} \right) e^{-i\theta} \right|^2 \\
&= \left| \frac{r}{d^2-r^2} \right|^2 \\
&= \frac{r^2}{(d^2-r^2)^2} \\
&= |a_2 - c|^2 \\
|a_3 - c|^2 &= \left| \left(\frac{d}{d^2-r^2} - \frac{1}{d+ri} \right) e^{-i\theta} \right|^2 \\
&= \left| \frac{d^2 + dri - d^2 + r^2}{(d^2-r^2)(d+ri)} \right|^2 \\
&= \left| \frac{r}{d^2-r^2} \right|^2 \\
&= \frac{r^2}{(d^2-r^2)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi l'image de C par A est le cercle de centre $\frac{-d}{d^2-r^2}e^{-i\theta}$ et de rayon $\left| \frac{r}{d^2-r^2} \right|$.

Proposition 1.9. *L'image par A d'un cercle de rayon r et de centre $de^{i\theta}$ où $d \neq r$ est le cercle de centre $\frac{-d}{d^2-r^2}e^{-i\theta}$ et de rayon $\left| \frac{r}{d^2-r^2} \right|$.*

1.4 Groupes de Schottky

Définition 1.4. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre cercles dont les intérieurs ne s'intersectent pas. Soient A et B deux homographies telles que :

1. A envoie C_1 dans C_2°
2. B envoie C_3 dans C_4°

Soient a et b leurs inverses respectifs. Le groupe généré par ces homographies est un *groupe de Schottky*.

On va écrire tout élément de ce groupe de Schottky sous forme de « mots » comme $AbaaBA$.

Définition 1.5. Soit G un groupe engendré par au moins deux générateurs. Il est dit *libre* s'il n'existe aucune relation R entre aucune paire de « mots » donnés.

Proposition 1.10. *Les groupes de Schottky sont libres.*

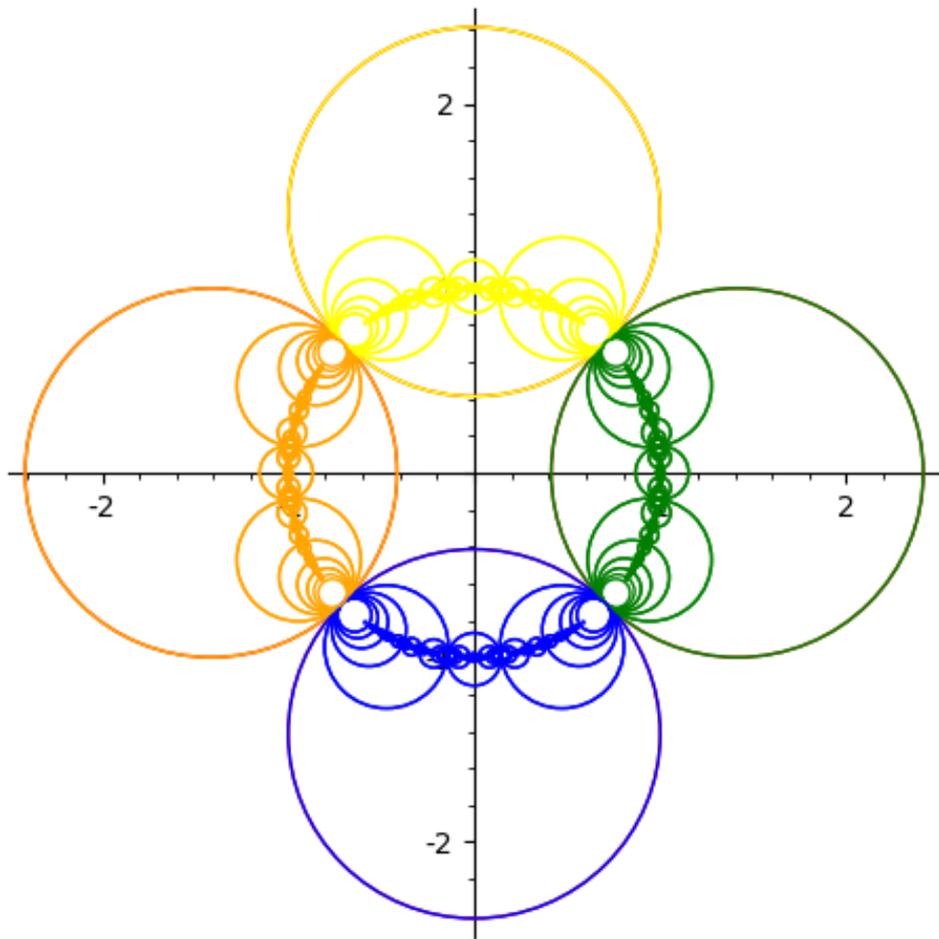


FIGURE 5 – Application des homographies $\frac{\sqrt{2}z+1}{z+\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{2}z+i}{-i \cdot z+\sqrt{2}}$ aux cercles de centre $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $i \cdot \sqrt{2}$ et $-i \cdot \sqrt{2}$ de rayon 1. Les couleurs reeprésentent la dernière homographie des « mots ». L'on remarque bien que chacune des 4 homographies envoie tout point à l'extérieur des cercles dans un des quatre cercles de départ.

2 Expérimentation

2.1 Premières Intuitions

Afin de faire l'étude de l'homographie A , on a tout d'abord voulu trouver les images de l'axe réel, et de l'axe complexe. On a vite constaté que A envoyait ces deux axes sur eux-mêmes.

Nous avons ensuite cherché l'image du cercle unitaire. On a remarqué que $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $|z| = 1$:

$$|Az| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1.$$

On a ensuite prolongé cette réflexion à tous les cercles centrés. En effet, si C est un cercle de rayon $r \in \mathbb{R}^+$, on a pour tout point z de C :

$$|Az| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}.$$

Grâce a ces résultats on a réalisé que l'image d'un cercle centré de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est le cercle centré de rayon $\frac{1}{r}$.

2.2 Premières Experiences sur Python

On a écrit un programme en *Python* (Section 3.1) auquel on donnait une droite ou un cercle, et qui appliquait A à un nombre de points de cette droite ou de ce cercle, et qui à l'aide de *Matplotlib* nous renvoyait un graphique avec les points et leurs images. On a ainsi pu constater que A pouvait aussi bien envoyer des cercles sur des cercles que sur des droites.

En testant avec plusieurs cercles on a constaté que ceux passant par l'origine étaient envoyés sur des droites, et ceux ne passant pas par l'origine sur des cercles.

C'est ainsi qu'on a décidé de traiter ces deux types de cercles différemment.

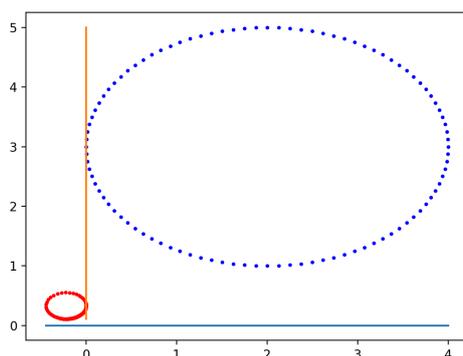


FIGURE 6 – Image par A d'un cercle ne passant pas par l'origine (bleu) donne le cercle en rouge

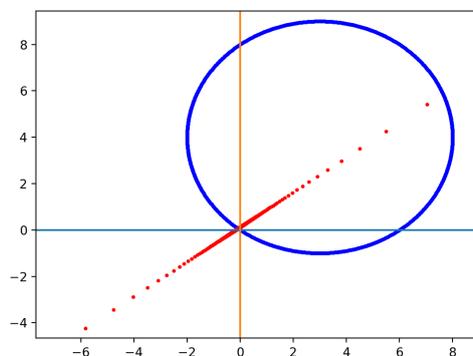


FIGURE 7 – Image par A d'un cercle passant par l'origine (bleu) donne la droite en rouge

Similairement on a remarqué que les droites passant par l'origine étaient envoyées sur des droites et celles ne passant pas par l'origine étaient envoyées sur des cercles.

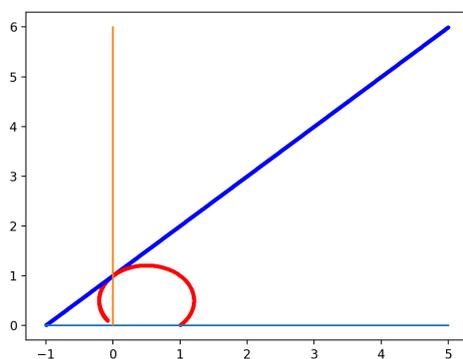


FIGURE 8 – Image par A d'une droite ne passant pas par l'origine (bleu) donne le cercle en rouge

Les résultats obtenus en 2.1 semblent correspondre à cette intuition.

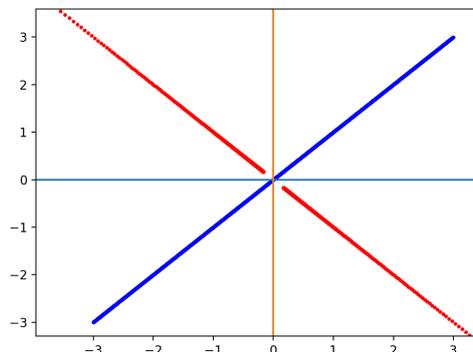


FIGURE 9 – Image par A d’une droite passant par l’origine (bleu) donne la droite en rouge

2.3 Premier calcul de l’image d’une droite verticale

Considérons la droite :

$$d \equiv x = a, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

que nous avons écrit sous la forme $d \equiv \{a + yi \mid y \in \mathbb{R}\}$. On pose $z = a + yi$ avec $y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$Az = \frac{-1}{a + yi}.$$

À l’aide du programme déjà utilisé auparavant (Section 3.1), on a constaté que des droites de cette forme ont comme image un cercle. Ainsi on a supposé que $b \in \mathbb{C}$ est le centre du cercle obtenu. Alors :

$$|Az - b| = \dots = \left(\frac{1 + 2ab}{a^2 + y^2} + b^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a cherché b tel que cette norme ne dépende pas de z , c’est à dire que :

$$1 + 2ab = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2a}.$$

On a donc trouvé que l’image de cette droite est le cercle de centre $-\frac{1}{2a}$ et de rayon $\left| \frac{1}{2a} \right|$, ce qui correspond à la Proposition (1.7).

2.4 Image d’une droite quelconque ne passant pas par l’origine

On a dans un premier temps utilisé la méthode décrite en 2.3, mais nous n’avons pas pu obtenir de résultat. On a alors écrit la droite sous la forme :

$$d \equiv \{a + t \cdot e^{i\theta} \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in [0, 2\pi[$$

où a est la distance à l'origine de la droite et θ est l'angle entre la droite et l'axe réelle.

En nous inspirant des calculs détaillés en 2.3 nous avons supposé que la distance à l'origine du centre du cercle obtenu par A serait également $\frac{1}{2a}$. Cette intuition s'est avérée être correcte. Ainsi on pouvait écrire le centre de ce cercle sous la forme :

$$\hat{b} = \frac{1}{2a} \cdot e^{i \cdot \alpha}$$

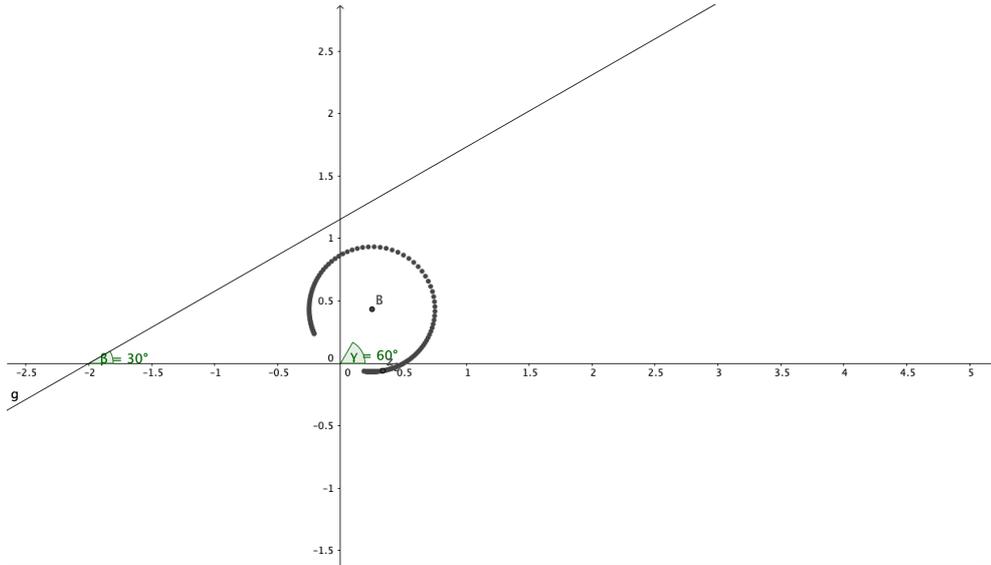


FIGURE 10 – Image d'une droite ne passant pas par l'origine par A donne le cercle de centre B

Afin de trouver la valeur de α nous avons tracé l'image de d par A pour un θ fixé (Figure 10), et il semblait que α est égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$, intuition qui s'est vérifiée lors de nos calculs dans la preuve de la Proposition (1.7).

2.5 Images des droites passant par l'origine et de tout cercle

Tandis que le calcul de l'image par A des droites passant par l'origine et des cercles passant par l'origine fût relativement direct, nous avons dû trouver une nouvelle méthode pour les cercles ne passant pas par l'origine.

Nous avons écrit ces cercles sous la forme :

$$C \equiv \{z_0 + r e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}^+$$

Par le même cheminement qu'en 2.4 nous avons trouvé que le centre du cercle résultant s'écrivait sous la forme :

$$\hat{b} = x \cdot e^{-i \cdot \theta} \quad \theta = \arg(z_0)$$

Nous avons trouvé c_1 et c_2 deux points du cercle résultant alignés avec \hat{b} , ce qui nous a permis de trouver la valeur exacte de x . Afin de confirmer notre intuition nous avons trouvé c_3 un troisième point du cercle à même distance de \hat{b} que c_1 et c_2 .

2.6 Exploitation des résultats

Une fois l'étude de notre homographie A terminée, nous pouvons à l'aide de compositions de A , translations et multiplications par un scalaire, qui sont toutes trois des homographies, trouver l'image de toute droite et tout cercle par toute homographie.

Puisque nous nous intéressons surtout aux images de cercles par des homographies, nous avons écrit un premier programme en *Sagemath* en nous basant sur le programme détaillé à la page 91 de *Indra's Pearls - The Vision of Felix Klein* par *David Mumford, Caroline Series* et *David Wright*.

Ce programme comportait trois fonctions principales :

1. **Mobius**

Prend comme paramètres une homographie T et un cercle C et renvoie l'image de ce cercle par T .

2. **applyOneHom**

Prend comme paramètres une homographie T , un cercle C et un nombre d'itérations i et trace l'ensemble :

$$\{T^j(C) \mid j \in \{-i, -i-1, \dots, i\}\}$$

3. **applyTwoHom**

Prend comme paramètres deux homographies A et B , un cercle C et un nombre i et trace l'ensemble :

$$\{T(C) \mid T = A_1 \circ \dots \circ A_k \quad A_j \in \{A, B, A^{-1}, B^{-1}\} \quad k \in \mathbb{N}_{\leq i}^*\}$$

On a appliqué ces fonctions à trois différents types d'homographies :

1. **Loxodromique**

La trace de la matrice de l'homographie $\notin [-2, 2]$ et peut être complexe.

2. **Elliptique**

La trace de la matrice de l'homographie $\in]-2, 2[$.

3. **Parabolique**

La trace de la matrice de l'homographie est ± 2 .

À l'aide de `applyOneHom` nous avons obtenu les images Figure 11 & 12

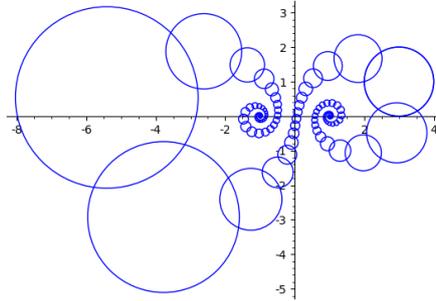


FIGURE 11 – Homographie loxodromique $\frac{(1-5i)z+1}{z+(1-5i)}$ appliquée au cercle de centre $3+i$ et de rayon 1.

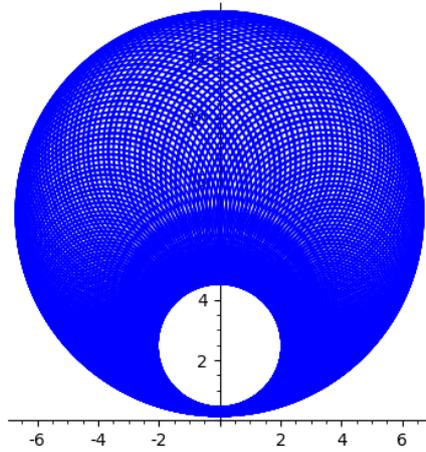


FIGURE 12 – Homographie elliptique $\frac{-2z+2}{-z-2}$ appliquée au cercle de centre $3+2i$ et de rayon 1.

2.7 Dessins de groupes de Schottky

On choisit quatre disques D_1, D_2, D_3 et D_4 et deux homographies A et B génératrices d'un groupe de Schottky.

On peut générer un ensemble de disques emboîtés à partir de ces quatre disques et deux homographies. Ces disques vont converger en un ensemble nommé *l'ensemble limite*.

2.7.1 Premier groupe de Schottky

Soient $0 < s < t < 1$ deux nombres réels. Soient :

1. C_A le disque ayant pour diamètre le segment $[s, t]$.
2. C_a la réflexion de C_A par rapport à l'origine.
3. C_b le disque ayant pour diamètre le segment $[\frac{1}{t}, \frac{1}{s}]$.
4. C_B la réflexion de C_b par rapport à l'origine.

Les centres de ces 4 disques se situent sur l'axe des réels.
 Soient A et B les homographies suivantes :

$$A : z \mapsto \frac{(s+t)z - 2st}{-2z + (s+t)}$$

$$B : z \mapsto \frac{(s+t)z + 2}{2stz + (s+t)}$$

On a que A envoie C_A sur l'intérieur de C_a et B envoie C_B sur l'intérieur de C_b .

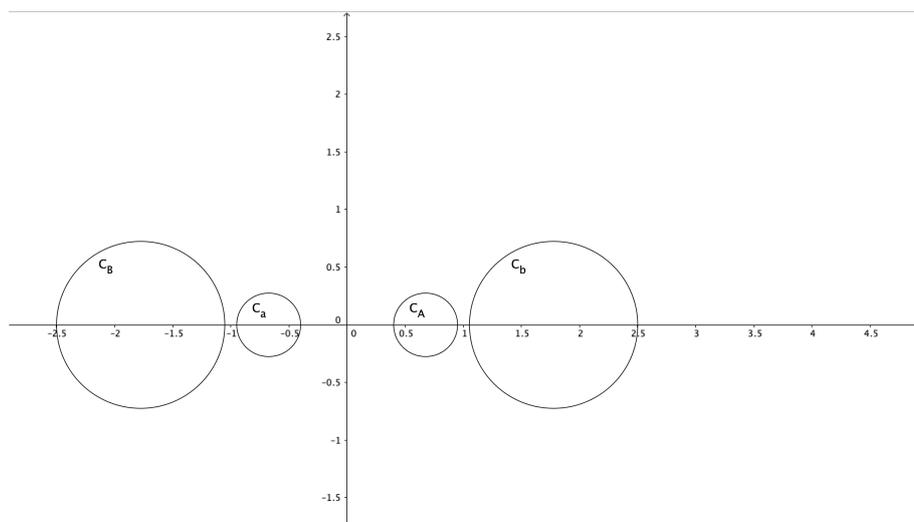


FIGURE 13 – Cercles du groupe de Schottky en 2.7.1

À l'aide de la fonction **applyTwoHom** nous avons dessiné le groupe de Schottky associé à ces cercles et avons obtenu la figure 14.

On remarque que l'ensemble limite de ce groupe de Schottky est sur l'axe réel.

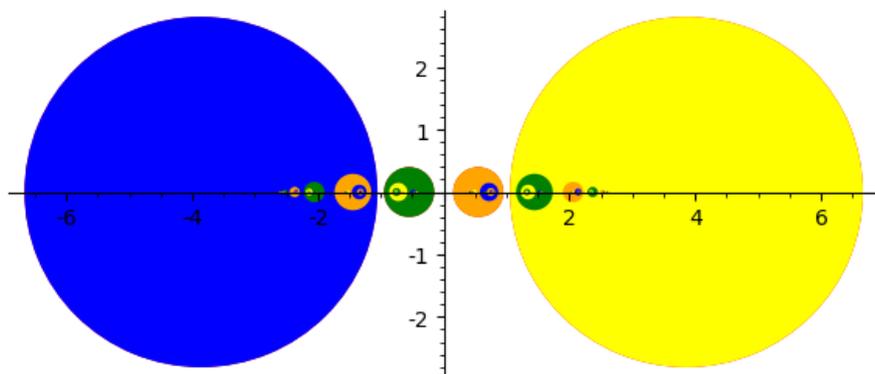


FIGURE 14 – Groupe de Schottky en 2.7.1 pour $s = 0.15$ et $t = 0.95$. Ici la couleur du disque indique la première homographie des « mots ».

2.7.2 Le groupe θ -Schottky

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

On définit deux homographies :

$$A : z \mapsto \frac{z + i \cos \theta}{-i \cos \theta z + 1}$$

$$B : z \mapsto \frac{z + \cos \theta}{\cos \theta z + 1}$$

Soient :

1. C_a le disque de centre $\frac{i}{\cos \theta}$ et de rayon $\tan \theta$.
2. C_A le disque de centre $\frac{-i}{\cos \theta}$ et de rayon $\tan \theta$.
3. C_b le disque de centre $\frac{1}{\cos \theta}$ et de rayon $\tan \theta$.
4. C_B le disque de centre $\frac{-1}{\cos \theta}$ et de rayon $\tan \theta$.

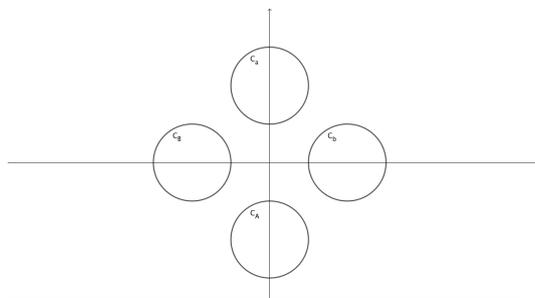


FIGURE 15 – Cercles du groupe de Schottky en 2.7.2

L'on a que B envoie C_B dans l'intérieur de C_b et similairement A envoie C_A dans l'intérieur de C_a .

À l'aide de la fonction **applyTwoHom** nous avons dessiné le groupe de Schottky associé à ces cercles et avons obtenu la figure 16.

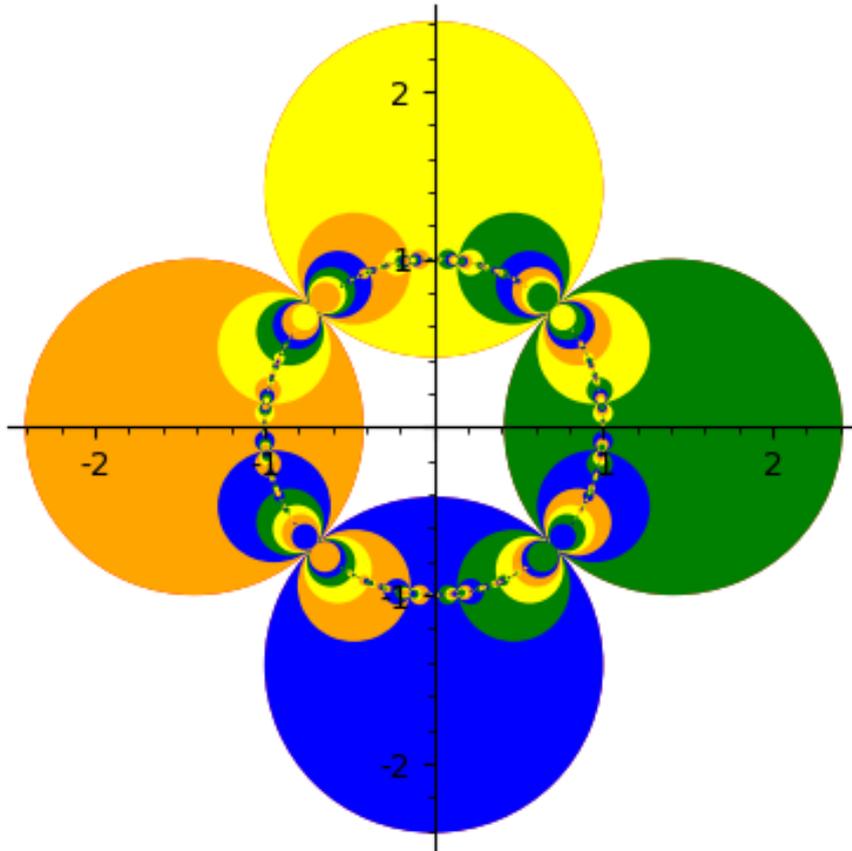


FIGURE 16 – Groupe de Schottky en 2.7.2 pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ici la couleur du disque indique la première homographie des « mots ».

3 Programmation

3.1 Premier programme en *Python*

Afin de se faire une première idée de l'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie nous avons écrit un programme qui nous permet d'appliquer une homographie à un cercle ou une droite point par point. Nous avons tout d'abord créé une classe **homomorphism** qui admet une méthode `ev()` qui évalue l'homographie en un point z donné.

Ensuite nous avons écrit une fonction **homC** qui admet comme paramètres :

1. Le centre d'un cercle $c \in \mathbb{C}$
2. Le rayon de ce cercle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
3. Une homographie T
4. Le nombre de points utilisés pour le calcul $iterations \in \mathbb{N}$

et qui trace les points du cercle et leur image par T .

```

def homC(c,r,T,iterations):
    plt.figure()
    CirclePoint = complex(0,0)
    for i in range(iterations):
        theta = (i/iterations)*2*math.pi
        CirclePoint = c + complex(r*math.cos(theta),r*math.sin(theta))
        plt.plot(CirclePoint.real,CirclePoint.imag,'bo',markersize=2)
        ImagePoint = T.ev(CirclePoint)
        plt.plot(ImagePoint.real,ImagePoint.imag,'ro',markersize=2)
    plt.show()

```

Nous avons fait de même afin de créer une fonction **homD** qui est identique à **homC**, à la différence qu'elle applique T aux points d'une droite. Ainsi le paramètre c devient un point de la droite et r est un vecteur directeur de la droite.

```

def homD(c,r,T,iterations):
    plt.figure()
    DroitePoint1 = c
    DroitePoint2 = c
    for i in range(iterations):
        DroitePoint1 = c + i*r
        DroitePoint2 = c - i*r
        plt.plot(DroitePoint1.real,DroitePoint1.imag,'bo',markersize=2)
        plt.plot(DroitePoint2.real,DroitePoint2.imag,'bo',markersize=2)
        ImagePoint1 = T.ev(DroitePoint1)
        ImagePoint2 = T.ev(DroitePoint2)
        plt.plot(ImagePoint1.real,ImagePoint1.imag,'ro',markersize=2)
        plt.plot(ImagePoint2.real,ImagePoint2.imag,'ro',markersize=2)
    plt.show()

```

3.2 Avantages et désavantages du programme

3.2.1 Avantages

Ce programme nous a surtout servi à trouver les images de droites ou de cercles de notre choix par une homographie, sans devoir connaître d'avance le résultat. C'est grâce à ce programme que nous avons réussi à avoir des premières intuitions.

3.2.2 Désavantages

Malheureusement notre programme avait plusieurs désavantages :

1. Le programme trace nos cercles point par point, ce qui rend le programme extrêmement inefficace. Cela a aussi comme conséquence que nos cercles et droites ne sont pas toujours proprement dessinés.
2. L'échelle sur l'axe réel n'est pas forcément la même que sur l'axe complexe, ce qui fait ressembler les cercles à des ellipses.
3. Nous n'avons pas implémenté de façon de gérer le point infini

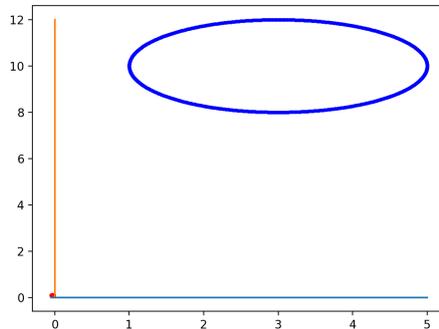


FIGURE 17 – Exemple d'un cas où notre cercle ressemble à une ellipse.

3.3 Programme en *Sagemath*

Une fois les résultats théoriques connus, nous avons pu écrire en *Sagemath* les fonctions **Mobius**, **applyOneHom** et **applyTwoHom** comme décrit en 2.5. Ceci nous évite de devoir calculer l'image de cercles point par point et rend le programme largement plus rapide. Nous avons également défini la classe **homogr** qui admet une méthode `.inv()` qui renvoie son homographie inverse.

```
def applyTwoHom(A,B,C, iterations):
    cercles = [(C,0)]
    Ainv = A.inv()
    Binv = B.inv()
    G = sage.plot.graphics.Graphics()
    iterations = 4*(3**(iterations-1))
    for i in range(iterations):
        c = cercles.pop(0)
        G += c[0].afficher()
        if c[1] != 1:
            temp = mobius(Ainv, c[0])
            cercles += [(temp,3)]
        if c[1] != 2:
            temp = mobius(Binv, c[0])
            cercles += [(temp,4)]
        if c[1] != 3:
            temp = mobius(A, c[0])
            cercles += [(temp,1)]
        if c[1] != 4:
            temp = mobius(B, c[0])
            cercles += [(temp,2)]
    G.show()
```

Afin d'obtenir des images plus propres on a décidé de donner différentes couleurs aux cercles. La première idée fût de la choisir en fonction de la dernière homographie appliquée.

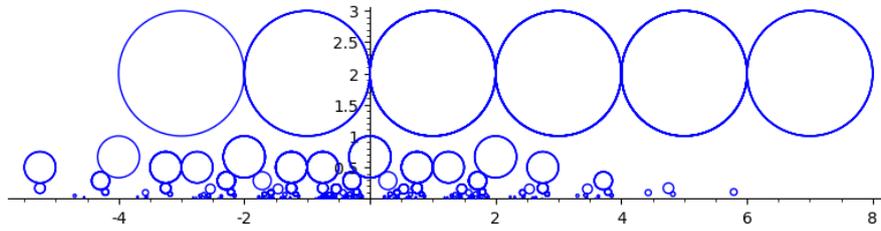


FIGURE 18 – Homographies $\frac{2z+1}{z+1}$ et $\frac{z+1}{z}$ appliquées au cercle de centre $3 + 2i$ et de rayon 1

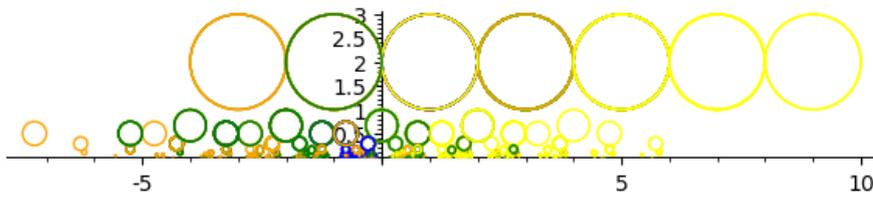


FIGURE 19 – Homographies $\frac{2z+1}{z+1}$ et $\frac{z+1}{z}$ appliquées au cercle de centre $3 + 2i$ et de rayon 1

3.4 Groupes de Schottky

Afin de dessiner les groupes de Schottky on a dû créer une nouvelle version de la fonction `applyTwoHom` que nous avons nommée `schottky`. Ce programme diffèrait de `applyTwoHom` uniquement par le fait qu'au lieu d'appliquer toutes les combinaisons de deux homographies à un cercle, il appliquait ces combinaisons à 4 cercles.

```
def schottky(A,B,C, iterations):
    cercles = [(C[0], [0]), (C[1], [0]), (C[2], [0]), (C[3], [0])]
    Ainv = A.inv()
    Binv = B.inv()
    G = sage.plot.graphics.Graphics()
    iterations = 4*(3**(iterations - 1))*len(C)
    for i in range(iterations):
        c = cercles.pop(0)
        if len(c[1]) == 1:
            G += c[0].afficher("red")
        elif c[1][1] == 1:
            G += c[0].afficher("green")
        elif c[1][1] == 2:
            G += c[0].afficher("yellow")
        elif c[1][1] == 3:
            G += c[0].afficher("orange")
        elif c[1][1] == 4:
            G += c[0].afficher("blue")
        if c[1][-1] != 1:
```

```

        temp = mobius(Ainv, c[0])
        cercles += [(temp, c[1] + [3])]
    if c[1][-1] != 2:
        temp = mobius(Binv, c[0])
        cercles += [(temp, c[1] + [4])]
    if c[1][-1] != 3:
        temp = mobius(A, c[0])
        cercles += [(temp, c[1] + [1])]
    if c[1][-1] != 4:
        temp = mobius(B, c[0])
        cercles += [(temp, c[1] + [2])]
G.show()

```

Cette fois ci nous avons dessiné des disques au lieu de cercles et nous avons donné une couleur aux cercles en fonction de la première homographie que nous leur avons appliquée.

Références

- [1] *Mumford, David and Series, Caroline and Wright, David and Gonick, Larry*
 Indra's Pearls : The Vision of *Felix Klein* Cambridge university press, 2002