Herleitung der Bogenlängenformel für ebene Funktionsgraphen

Betrachten wir eine Funktion $y = f(x)$ auf dem Intervall $\mathrm{dom} f = [a, b]$. Wir nehmen an, dass die Funktion *stetig differenzierbar* ist, das heißt, dass ihre Ableitung $f'(t)$ auf $\mathrm{dom} f$ existiert und stetig ist.

Zunächst wollen wir die Länge der Kurve $\mathscr{C}_f$ approximieren, indem wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Breite $\Delta x := x_{i+1} - x_i$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ unterteilen. Wir bezeichnen mit P_i den Punkt auf $\mathscr{C}_f$ mit den Koordinaten $(x_i; f(x_i))$.
Dann können wir $\mathscr{C}_f$ durch den Polygonzug $(P_0, P_1, ..., P_n)$ approximieren.

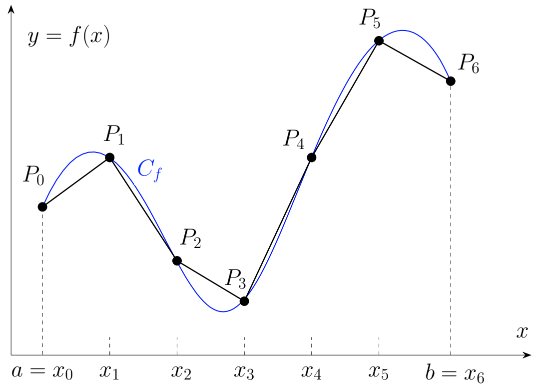
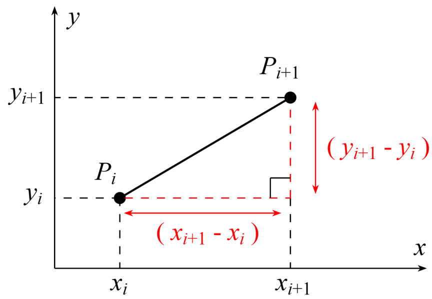


Figure 18: Beispiel eines Polygonzugs für $n = 6$

Um die Länge jedes Streckenabschnitts $[P_i P_{i+1}]$ zu bestimmen, können wir den Satz des Pythagoras verwenden:

$$\begin{aligned} (\overline{P_i\ P_{i+1}})^2 &= (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 \\ \Rightarrow \qquad \overline{P_i\ P_{i+1}} &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned}$$

mit $\Delta y := y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$



Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $c_i \in (x_i, x_{i+1})$, sodass

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_i) &= f'(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ \Leftrightarrow \qquad \Delta y &= f'(c_i) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Dann kann die Länge geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \overline{P_i\ P_{i+1}} &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\ \Delta x \end{aligned}$$

Die Länge L von $\mathscr{C}_f$ kann somit durch die Summe der Längen der Streckenabschnitte approximiert werden.

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i\ P_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\ \Delta x\right]$$

Um die Genauigkeit dieser Approximation zu erhöhen, müssen wir immer kleinere Teilintervalle wählen, also eine immer größere Anzahl n von Teilintervallen. Mit anderen Worten: Wir müssen den Grenzwert für $n \to \infty$ betrachten:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i\ P_{i+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\right] \Delta x$$

Da dies der Grenzwert der Riemannschen Summen einer Funktion ist, wenn die Teilintervalle immer kleiner werden, handelt es sich um das Riemann-Integral. Wir können also schreiben:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

Herleitung der Bogenlängenformel für ebene Kurven:

Für eine allgemeine ebene Kurve funktioniert die Herleitung der Bogenlängenformel ähnlich. Betrachten wir eine Kurve C, die für $t \in [a, b]$ durch $(x(t), y(t))$ parametrisiert ist[24]. Wir nehmen an, dass die Kurve *stetig differenzierbar* ist, das heißt, dass die Ableitungen $x'(t)$ und $y'(t)$ auf $[a, b]$ existieren und stetig sind.

Wie zuvor unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle gleicher Breite $\Delta t := t_{i+1} - t_i$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und bezeichnen mit P_i den Punkt auf der Kurve mit den Koordinaten $(x(t_i), y(t_i))$. Dann kann die Länge approximiert werden durch

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i\ P_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1})-x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1})-y(t_i)]^2}$$

Analog zu vorher verwenden wir den Mittelwertsatz und schreiben

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(c_i)\cdot \Delta t \qquad \text{für ein } c_i \in (t_i, t_{i+1}) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(k_i)\cdot \Delta t \qquad \text{für ein } k_i \in (t_i, t_{i+1}) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} L &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1})-x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1})-y(t_i)]^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(c_i)\cdot\Delta t]^2 + [y'(k_i)\cdot\Delta t]^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(k_i)^2}\cdot\Delta t \end{aligned}$$

Um die Genauigkeit dieser Approximation zu erhöhen, betrachten wir den Grenzwert, wenn die Anzahl der Teilintervalle zunimmt, also $n \to \infty$ und $\Delta t \to 0$. Wegen der Stetigkeit von $x'(t)$ und $y'(t)$ gilt $c_i,\ k_i \to t_i$, sodass der Ausdruck zu einer Riemannschen Summe wird:

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i\ P_{i+1}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(k_i)^2}\cdot\Delta t \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2}\cdot\Delta t \end{aligned}$$

[24] Man beachte, dass eine Funktion $y = f(x)$ durch $(x, f(x))$ für $x \in \mathrm{dom} f$ parametrisiert werden kann.

Daher gilt:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$