

Dérivation de la formule de longueur d'arc pour les courbes planes représentatives de fonctions

Considérons une fonction $y = f(x)$ sur l'intervalle $\text{dom}f = [a, b]$. On suppose que la fonction est *continûment dérivable*, c'est-à-dire que sa dérivée $f'(t)$ existe et est continue sur $\text{dom}f$.

Dans un premier temps, on veut approximer la longueur de la courbe \mathcal{C}_f en divisant l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même largeur $\Delta x := x_{i+1} - x_i$, avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On note P_i le point de \mathcal{C}_f de coordonnées $(x_i; f(x_i))$.

On peut alors approximer \mathcal{C}_f par la ligne brisée (P_0, P_1, \dots, P_n) .

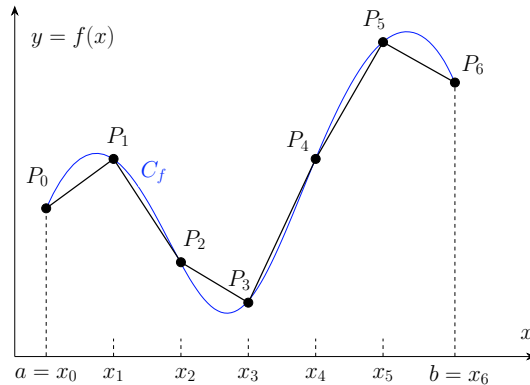
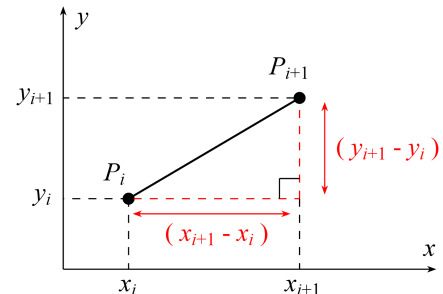


Figure 29: Exemple d'une ligne brisée pour $n = 6$

Pour trouver la longueur de chaque segment $[P_i P_{i+1}]$, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} (\overline{P_i P_{i+1}})^2 &= (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 \\ \Rightarrow \overline{P_i P_{i+1}} &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned}$$

avec $\Delta y := y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$



D'après le théorème des accroissements finis, il existe un $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ tel que

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_i) &= f'(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ \Leftrightarrow \Delta y &= f'(c_i) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

La longueur peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \overline{P_i P_{i+1}} &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \end{aligned}$$

La longueur L de \mathcal{C}_f peut donc être approximée par la somme des longueurs des segments.

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \right]$$

Pour améliorer la précision de cette approximation, il faut prendre des sous-intervalles de plus en plus petits, c'est-à-dire un nombre n de sous-intervalles de plus en plus grand. Autrement dit, il faut passer à la limite $n \rightarrow \infty$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \right] \Delta x$$

Comme il s'agit de la limite de sommes de Riemann lorsque la taille des sous-intervalles tend vers zéro, on obtient l'intégrale de Riemann. On peut donc écrire :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Dérivation de la formule de longueur d'arc pour les courbes planes :

Pour une courbe plane générale, la dérivation de la formule de longueur d'arc se fait de manière analogue.

Considérons une courbe C paramétrée par $(x(t), y(t))$ pour $t \in [a, b]$ ⁴⁶. On suppose que la courbe est *continûment dérivable*, c'est-à-dire que les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ existent et sont continues sur $[a, b]$.

Comme précédemment, on divise l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de même largeur $\Delta t := t_{i+1} - t_i$, avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, et on note P_i le point de la courbe de coordonnées $(x(t_i), y(t_i))$.

La longueur peut alors être approximée par

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}$$

Comme précédemment, on utilise le théorème des accroissements finis pour écrire

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(c_i) \cdot \Delta t && \text{for a } c_i \in (t_i, t_{i+1}) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(k_i) \cdot \Delta t && \text{for a } k_i \in (t_i, t_{i+1}) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} L &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(c_i) \cdot \Delta t]^2 + [y'(k_i) \cdot \Delta t]^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(k_i)^2} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Pour améliorer la précision de cette approximation, on passe à la limite lorsque le nombre de sous-intervalles augmente, c'est-à-dire lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\Delta t \rightarrow 0$. Par continuité de $x'(t)$ et $y'(t)$, on a $c_i, k_i \rightarrow t_i$, de sorte que l'expression devient une somme de Riemann :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(k_i)^2} \cdot \Delta t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

⁴⁶Remarquons qu'une fonction $y = f(x)$ peut être paramétrée par $(x, f(x))$ pour $x \in \text{dom} f$.

Ainsi,

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$