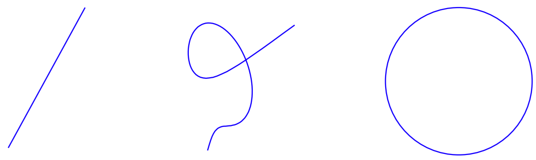
Eine intuitive Definition der Krümmung

Krümmung ebener Kurven:
Als erste Definition können wir die **Krümmung** als ein Maß dafür auffassen, wie stark sich eine Kurve an einem gegebenen Punkt krümmt. Betrachten wir zum Beispiel die folgenden drei Kurven: eine Gerade, eine allgemeine gekrümmte Linie und einen Kreis.



Intuitiv können wir beobachten, dass sich eine Gerade nicht krümmt, während der Kreis eine "konstante Krümmung" besitzt.

Kreise liefern somit eine natürliche Möglichkeit, die "Biegung", also die Krümmung, von Kurven zu messen. Intuitiv entspricht ein kleinerer Radius einer "stärkeren" Biegung (größere Krümmung), während ein größerer Radius einer "sanfteren" Biegung (kleinere Krümmung) entspricht.
Daher definieren wir die **Krümmung eines Kreises** durch $\kappa = \frac{1}{r}$, wobei r der Radius des Kreises ist.

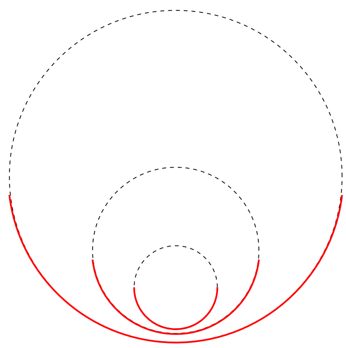


Figure 1: Veränderlicher Radius

Um die Krümmung einer Kurve in einem Punkt zu messen, definieren wir den **Schmiegkreis**[1] als den Kreis, der die Kurve in diesem Punkt am besten annähert. Dann können wir die **Krümmung der Kurve in einem Punkt** als die Krümmung ihres Schmiegkreises definieren, also als den Kehrwert seines Radius.

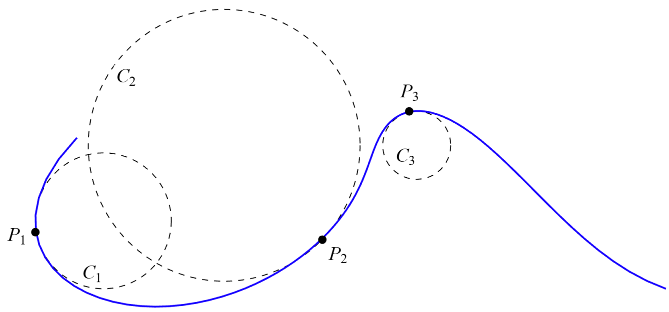


Figure 2: Eine Kurve mit den Punkten P_1, P_2, P_3 und den zugehörigen Schmiegkreisen C_1, C_2, C_3 (anschauliche Skizze)

Betrachten wir das Beispiel in Abbildung 2. Wir sehen, dass der Kreis C_2 den größten Radius besitzt, was einer sanften Krümmung der Kurve entspricht, während der Kreis C_3 den kleinsten Radius besitzt und die Kurve an diesem Punkt stärker gekrümmt ist.

[1] Ein solcher Kreis ist nur an Punkten wohldefiniert, an denen die Kurve nicht lokal geradlinig ist.

Krümmung einer Helix

Für bestimmte[2] Raumkurven existiert der Schmiegkreis in einem Punkt und liegt in der Schmiegebene der Kurve in diesem Punkt, also in der Ebene, die die Kurve dort am besten approximiert. Analog ist die **Krümmung in einem Punkt** durch den Kehrwert des Radius des Schmiegkreises in diesem Punkt gegeben. Die Krümmung einer Helix lässt sich herleiten als

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + c^2}$$

mit den Konstanten r und c. Wir sehen, dass die Krümmung einer Helix, ähnlich wie die Krümmung eines Kreises, in jedem Punkt konstant ist und vom Radius ihrer Kreisbewegung abhängt.

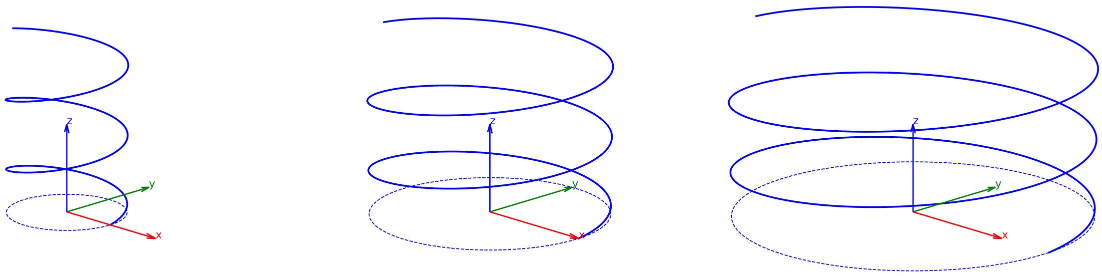


Figure 3: Drei Helices mit den Radien $r = 0.5$, $r = 1$ und $r = 1.5$ und derselben Konstanten c.

Die Krümmung einer Helix als Funktion des Radius r:

Wir nehmen an, dass c fest ist, und betrachten κ als Funktion des Radius r. Diese Funktion wollen wir nun analysieren:

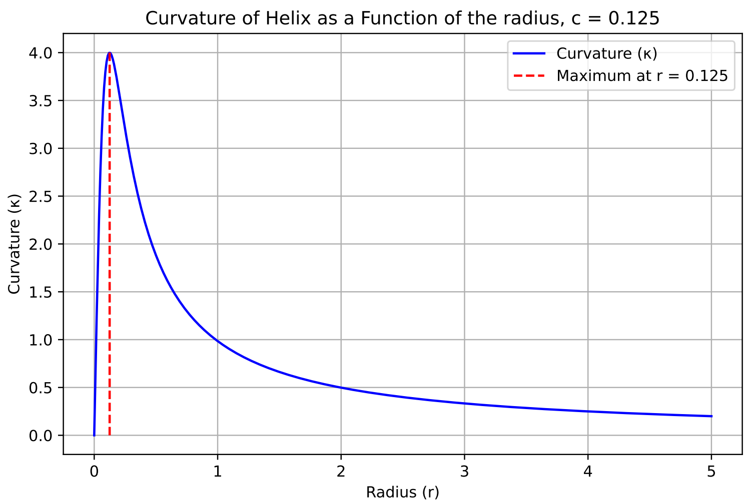


Figure 4: Krümmung einer Helix als Funktion ihres Radius r, mit $c = 0.125$

- Für $r \to 0$ nimmt die Krümmung gegen 0 ab.
  Interpretation: Für $r \to 0$ degeneriert die Helix zu einer Geraden, die keine Krümmung besitzt.

[2] Die Kurve muss regulär sein (nicht verschwindende erste Ableitung an allen Punkten) und zusätzlich an allen Punkten eine nicht verschwindende zweite Ableitung besitzen.

- Für $r \to +\infty$ nimmt die Krümmung gegen 0 ab.
  Interpretation: Für $r \to +\infty$ wird die Helix "flacher", und ihre Windungen werden so weit, dass die Bahn lokal einer Geraden ähnelt.

- Die Krümmung besitzt bei $r = |c|$ ein Maximum.
  Interpretation: Für $r = |c|$ ist die Helix zwischen ihrer radialen (r) und ihrer vertikalen (c) Komponente "ausgewogen". Die Krümmung wird maximal, weil die Helix weder zu "flach" (kleines r) noch zu "gestreckt" (großes r) ist.
  - Für $r < |c|$ ist die Helix stärker vertikal "gestreckt".
  - Für $r > |c|$ ist die radiale Komponente der Helix stärker "dominant".

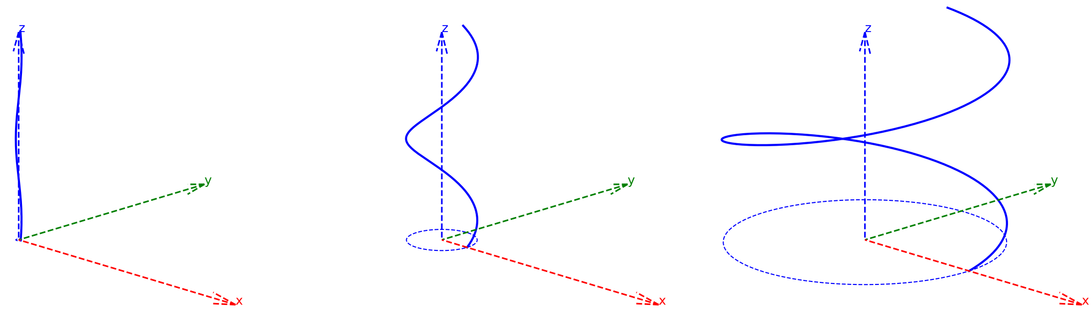


Figure 5: Drei Helices mit den Radien $r = 0.01$, $r = c = 0,125$ und $r = 0,5$ und derselben Konstanten $c = 0.125$.

Die Krümmung einer Helix als Funktion ihrer vertikalen Komponente c:
Wir nehmen an, dass r fest ist, und betrachten κ als Funktion von c. Diese Funktion wollen wir nun analysieren:

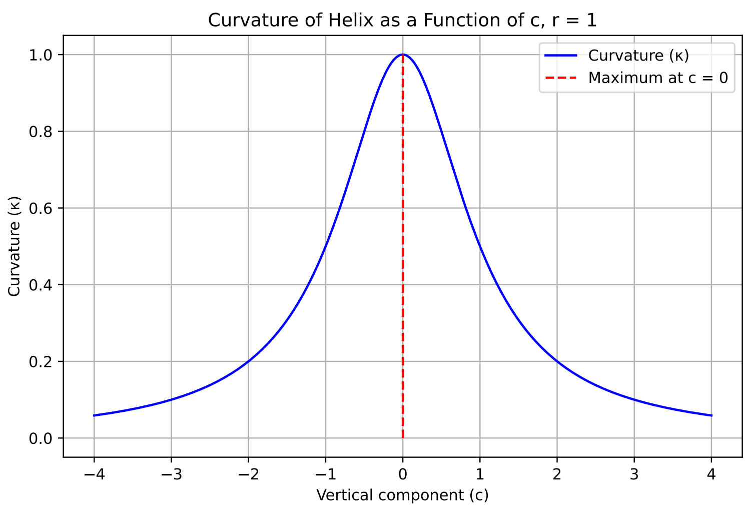


Figure 6: Krümmung einer Helix als Funktion ihrer vertikalen Komponente c, mit $r = 1$

- Für $|c| \to +\infty$ nimmt die Krümmung gegen 0 ab.
  Interpretation: Für $|c| \to +\infty$ degeneriert die Helix zu einer Geraden, die keine Krümmung besitzt.

- Die Krümmung besitzt bei $c = 0$ ein Maximum.
  Interpretation: Für $c = 0$ degeneriert die Helix zu einem Kreis mit Radius r in der xy- Ebene, der eine konstante Krümmung besitzt (nämlich $\frac{1}{r}$).