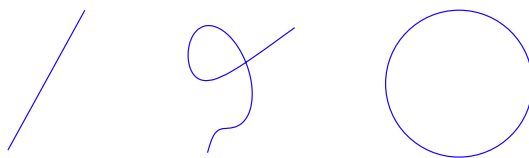


## Une définition intuitive de la courbure

### Courbure des courbes planes :

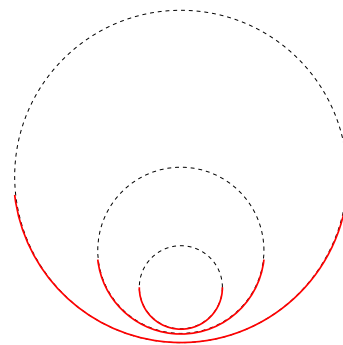
Comme première définition, on peut définir la **courbure** comme une mesure de la manière dont une courbe se courbe en un point donné. Considérons par exemple les trois courbes suivantes : une droite, une courbe quelconque et un cercle.



Intuitivement, on observe qu'une droite ne se courbe pas, tandis qu'un cercle possède une courbure « constante ».

Ainsi, les cercles fournissent une manière naturelle de mesurer « le degré de courbure », ou la courbure, des courbes. Intuitivement, un rayon plus petit correspond à une courbure plus marquée (courbure plus grande), tandis qu'un rayon plus grand correspond à une courbure plus douce (courbure plus petite).

On définit donc la **courbure d'un cercle** par  $\kappa = \frac{1}{r}$ , où  $r$  est le rayon du cercle.



Pour mesurer la courbure d'une courbe en un point, on définit le **cercle osculateur**<sup>1</sup> comme le cercle qui approxime le mieux la courbe en ce point. On peut alors définir la **courbure de la courbe en un point** comme la courbure de son cercle osculateur, c'est-à-dire l'inverse de son rayon.

Figure 1: Rayon variable

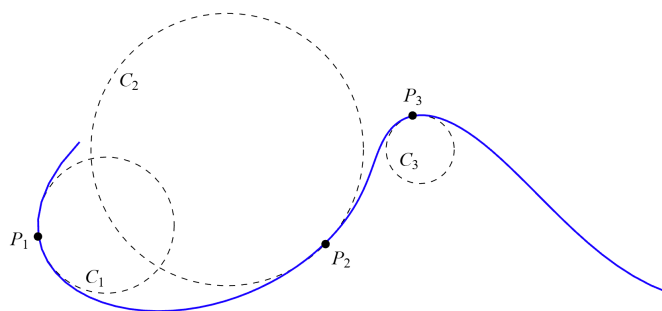


Figure 2: Une courbe avec les points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et les cercles osculateurs correspondants  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  (schéma illustratif)

Dans l'exemple de la Figure 2, on voit que le cercle  $C_2$  possède le plus grand rayon, ce qui correspond à une courbure plus douce de la courbe, tandis que le cercle  $C_3$  possède le plus petit

<sup>1</sup>Du latin, littéralement « le cercle qui embrasse ». Un tel cercle n'est bien défini qu'aux points où la courbe n'est pas localement rectiligne.

rayon et que la courbe  $y$  est plus fortement courbée.

### Courbure d'une hélice

Pour certaines<sup>2</sup> courbes de l'espace, le cercle osculateur en un point existe et appartient au plan osculateur de la courbe en ce point, c'est-à-dire au plan qui approxime le mieux la courbe en ce point. De même, la **courbure en un point** est donnée par l'inverse du rayon de son cercle osculateur en ce point. La courbure d'une hélice s'obtient sous la forme

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + c^2}$$

avec  $r$  et  $c$  constants. On voit que, de manière analogue à la courbure d'un cercle, la courbure d'une hélice est constante en chaque point et dépend du rayon de son mouvement circulaire.

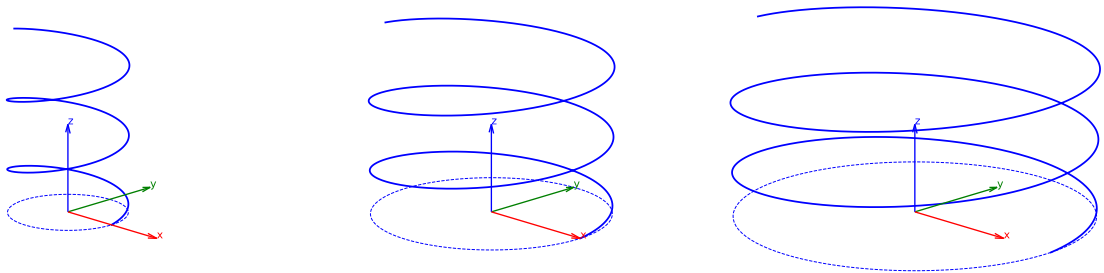


Figure 3: Trois hélices de rayons  $r = 0.5$ ,  $r = 1$  et  $r = 1.5$ , avec la même constante  $c$ .

### La courbure d'une hélice comme fonction du rayon $r$ :

Supposons que  $c$  soit fixé et considérons  $\kappa$  comme une fonction du rayon  $r$ . Nous voulons analyser cette fonction :

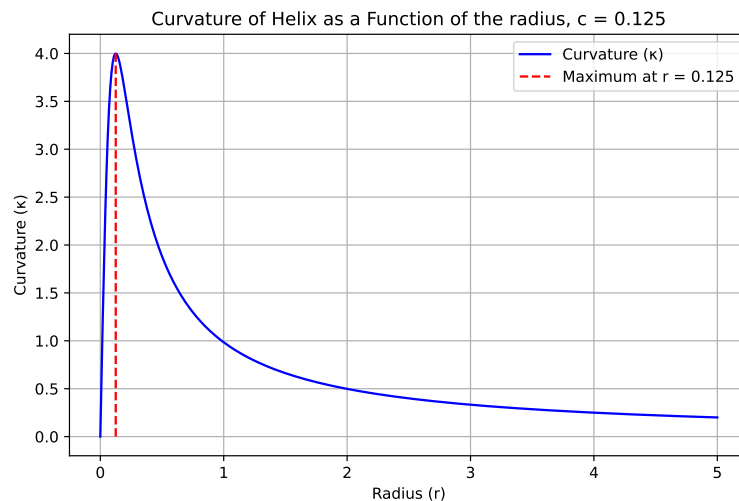


Figure 4: Courbure d'une hélice en fonction de son rayon  $r$ , avec  $c = 0.125$

- Lorsque  $r \rightarrow 0$ , la courbure tend vers 0.

**Interprétation :** Lorsque  $r \rightarrow 0$ , l'hélice dégénère en une droite, qui n'a pas de courbure.

<sup>2</sup>La courbe doit être régulière (dérivée première non nulle en tout point) et posséder en plus une dérivée seconde non nulle en tout point.

- Lorsque  $r \rightarrow +\infty$ , la courbure tend vers 0.

**Interprétation :** Lorsque  $r \rightarrow +\infty$ , l'hélice devient plus « plate » et ses tours deviennent si larges que la trajectoire ressemble localement à une droite.

- La courbure atteint un maximum en  $r = |c|$ .

**Interprétation :** Pour  $r = |c|$ , l'hélice est « équilibrée » entre sa composante radiale ( $r$ ) et sa composante verticale ( $c$ ). La courbure est maximale parce que l'hélice n'est ni trop « plate » (petit  $r$ ), ni trop « étirée » (grand  $r$ ).

- Pour  $r < |c|$ , l'hélice est davantage « étirée » verticalement.
- Pour  $r > |c|$ , la composante radiale de l'hélice est plus dominante.

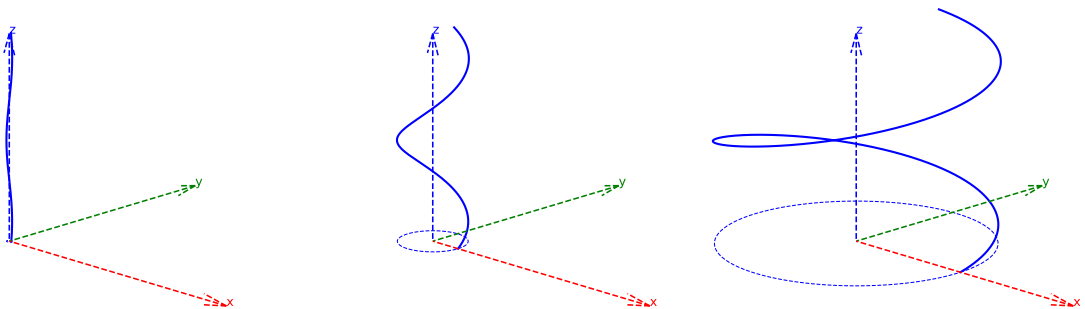


Figure 5: Trois hélices de rayons  $r = 0,01$ ,  $r = c = 0,125$  et  $r = 0,5$ , avec la même constante  $c = 0,125$ .

### La courbure d'une hélice comme fonction de sa composante verticale $c$ :

Supposons que  $r$  soit fixé et considérons  $\kappa$  comme une fonction de  $c$ . Nous voulons analyser cette fonction :

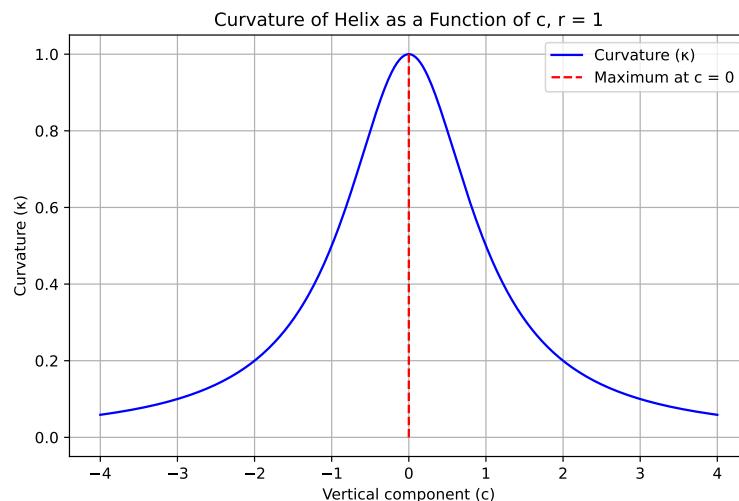


Figure 6: Courbure d'une hélice en fonction de sa composante verticale  $c$ , avec  $r = 1$

- Lorsque  $|c| \rightarrow +\infty$ , la courbure tend vers 0.

**Interprétation :** Lorsque  $|c| \rightarrow +\infty$ , l'hélice dégénère en une droite, qui n'a pas de courbure.

- La courbure atteint un maximum en  $c = 0$ .

**Interprétation :** Pour  $c = 0$ , l'hélice dégénère en un cercle de rayon  $r$  dans le plan  $xy$ , dont la courbure est constante (égale à  $\frac{1}{r}$ ).