# Übungen zu Helices

## Helix-Rätsel[8]

Ein rotierender Barbierpfosten besteht aus einem Zylinder, auf den rote, weiße und blaue Helices gemalt sind. Der Zylinder ist 1 Meter hoch. Der rote Streifen bildet mit der Grundfläche des Zylinders einen Winkel von 30 Grad. **Wie lang ist der rote Streifen?**

**Mögliche Antworten:**

Ein Barbierpfosten[9]

**1) Ohne Formeln:** Wenn ein rechtwinkliges Dreieck um einen beliebigen Zylinder gewickelt wird, wobei die Grundseite des Dreiecks einmal um die Grundfläche des Zylinders verläuft, zeichnet die Hypotenuse des Dreiecks eine Helix auf dem Zylinder. Man kann sich den roten Streifen des Barbierpfostens als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks vorstellen und dieses Dreieck dann vom Zylinder "abwickeln". Das Dreieck hat Winkel von 30 und 60 Grad. Die Hypotenuse eines solchen Dreiecks muss doppelt so lang sein wie die Höhe[10]. In diesem Fall beträgt die Höhe 1 Meter, also ist die Hypotenuse (der rote Streifen) 2 Meter lang.

**2) Mit Formeln:** Gegeben sind die folgenden Informationen

- Höhe $h = 1$ Meter $\rightarrow h = T \cdot c = 1$
- Helixwinkel $= 30° \rightarrow 30° = \arctan\left(\frac{c}{r}\right) \Leftrightarrow \dfrac{c}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Dann erhalten wir mit der Bogenlängenformel:

$$L = T \cdot \sqrt{r^2 + c^2} = T \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} r\right)^2 + r^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot T \cdot r = 2 \cdot T \cdot c = 2 \cdot h = 2$$

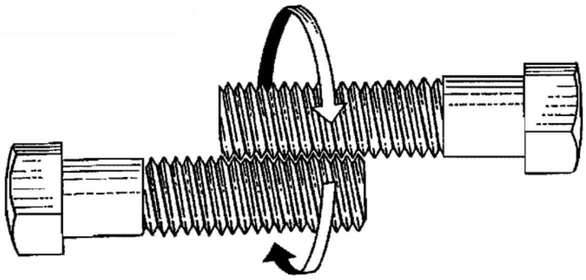
**Interessantes Ergebnis:**
Die Länge des roten Streifens hängt nur von der Höhe des Zylinders und vom Helixwinkel ab. Sie ist vollständig **unabhängig** vom Radius des Zylinders! Egal wie breit oder schmal der Zylinder ist: Solange der Helixwinkel 30° beträgt, ist die Länge des Streifens immer doppelt so groß wie die Höhe.

[8] Rätsel und Lösung enthalten in: Martin Gardner. The Sixth Book of Mathematical Diversions. University of Chicago Press, 1984. isbn: 0226282503. p.8

[9] Bildquelle: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Barber%27s_signboard.jpg`

[10] Zeichne das rechtwinklige Dreieck mit Höhe $h$ und Hypotenuse $L$. Verdoppelt man es, entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Da $h$ die Hälfte der Seitenlänge $L$ ist, erhält man $L = 2 \cdot h$.

**Schrauben drehen (Däumchen drehen)**[11]



Zwei identische Schrauben werden so aneinandergelegt, dass ihre schraubenförmigen Rillen ineinandergreifen. Wenn man die Schrauben umeinander bewegt, wie man mit den Daumen dreht, und jede Schraube fest am Kopf hält, sodass sie sich nicht um ihre eigene Achse dreht, oder sie in der gezeigten Richtung umeinander bewegt, werden sich die Köpfe dann

(a) nach innen bewegen,

(b) nach außen bewegen

(c) im gleichen Abstand voneinander bleiben?

Das Problem soll gelöst werden, ohne es praktisch auszuprobieren.

**Offizielle Lösung:** Die umeinander bewegten Schrauben bewegen sich weder nach innen noch nach außen. Sie verhalten sich wie jemand, der eine abwärtsfahrende Rolltreppe hinaufgeht und dabei stets an derselben Stelle bleibt.

**"Solang das Deutsche Reich besteht, wird die Schraube rechts gedreht"[12]:**
Die Schrauben folgen der üblichen Gewinderegel: Eine Drehung im Uhrzeigersinn zieht fest, eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn löst. Beim Umeinanderbewegen der Schrauben erscheint die Bewegung von einer Seite aus im Uhrzeigersinn und von der gegenüberliegenden Seite aus gegen den Uhrzeigersinn. Wenn sich also eine Schraube festziehen würde, würde sich die andere lösen; die Effekte heben sich auf, sodass keine Gesamtbewegung entsteht.

Weitere, anschaulichere Erklärungen finden sich auf den folgenden Webseiten (auf Englisch):
`https://leancrew.com/all-this/2025/03/a-sciam-bolt-puzzle/`
`https://puzzles.nigelcoldwell.co.uk/eightyfour.htm`.

[11] Rätsel und Lösung enthalten in: Martin Gardner. The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems. W. W. Norton & Company, 2001. isbn: 978-0393020236; p.124

[12] `https://puzzling.stackexchange.com/questions/52415/martin-gardners-the-twiddled-bolts`

**Rechenübung**[13]

Bestimme den Schatten der Helix, die durch die Parameterdarstellung

$$x = r\cos(t), y = r\sin(t), z = ct$$

auf der $(xOy)$-Ebene, wenn die Lichtstrahlen parallel zur Tangente im Punkt $t = 0$ verlaufen.

**Benötigte Formeln:**

1. Sei $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eine reguläre[a] Kurve. Dann ist der **Tangentenvektor bei** $\mathbf{r}(t_0)$ gegeben durch

$$\vec{T}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=t_0}$$

2. **Darstellung von Geraden im Raum:**
Eine Gerade $d$ durch einen Punkt $A$ mit Richtungsvektor $\vec{u}$ kann durch ein System von Parametergleichungen definiert werden:

$$M(x;y;z) \in d \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot x_u \\ y = y_A + \lambda \cdot y_u \\ z = z_A + \lambda \cdot z_u \end{cases}$$

[a] Regulär = differenzierbar mit nicht verschwindender Ableitung in allen Punkten

[13] https://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/2328910/helice-exercice-simple-et-original

**Lösung:**

(1) Zunächst berechnen wir den Tangentenvektor im Punkt $t = 0$:

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ c \end{pmatrix}$$

Also gilt zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\vec{T_0} := \vec{T}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ c \end{pmatrix}$$

Die Lichtstrahlen sind parallel zu $\vec{T_0}$, also ist der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Lichtstrahlen kollinear zum Tangentenvektor. Wir können $\vec{v} = \vec{T_0}$ wählen.

Da ein Lichtstrahl $l$ durch einen Punkt $P(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ der Helix verlaufen muss, bevor er die $(xOy)$-Ebene trifft, können wir den Lichtstrahl $l$ definieren durch:

$$M(x(t), y(t), z(t)) \in l \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = x_P + k \cdot x_v \\ y(t) = y_P + k \cdot y_v \\ z(t) = z_P + k \cdot z_v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = r\cos(t) + k \cdot 0 \\ y(t) = r\sin(t) + k \cdot r \\ z(t) = ct + k \cdot c \end{cases}$$

Die $(xOy)$-Ebene ist durch $z = 0$ definiert. Um den Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der $(xOy)$-Ebene zu finden, setzen wir in der Parametergleichung des Lichtstrahls $z = 0$:

$$z(t) = ct + k \cdot c = 0 \quad \Rightarrow t + k = 0 \quad \Rightarrow k = -t$$

Setzt man $k = -t$ wieder in die Parametergleichung des Lichtstrahls ein, erhält man die $x$- und $y$-Koordinaten des Schattens auf der $(xOy)$-Ebene:

$$\begin{aligned} x_{shadow} &= r\cos(t) \\ y_{shadow} &= r\sin(t) + (-t) \cdot r = r(\sin(t) - t) \end{aligned}$$

Der Schatten der Helix ist also gegeben durch:

$$x = r\cos(t) \qquad y = r\sin(t) - rt$$

Diese Kurve heißt **Zykloide**. Eine Zykloide kann als die Kurve beschrieben werden, die ein Punkt auf einem Kreis beschreibt, während der Kreis entlang einer Geraden rollt.