Exercices avec les hélices

Énigme de l'hélice[8]

Un poteau de barbier rotatif est constitué d'un cylindre sur lequel sont peintes des hélices rouges, blanches et bleues. Le cylindre mesure 1 mètre de haut. La bande rouge forme un angle de 30 degrés avec la base du cylindre. **Quelle est la longueur de la bande rouge ?**

Réponses possibles :

Un poteau de barbier [9]

1) Sans formule : Si l'on enroule un triangle rectangle autour d'un cylindre, avec la base du triangle qui fait le tour de la base du cylindre, alors l'hypoténuse du triangle trace une hélice sur le cylindre. On peut voir la bande rouge du poteau de barbier comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle, puis « dérouler » ce triangle à partir du cylindre. Le triangle possède alors des angles de 30 et 60 degrés. L'hypoténuse d'un tel triangle doit être égale au double de la hauteur[10]. Dans ce cas, la hauteur est 1 mètre, donc l'hypoténuse (la bande rouge) mesure 2 mètres.

2) Avec des formules : Les informations données sont les suivantes

- hauteur $h = 1$ mètre $\to h = T \cdot c = 1$
- angle de l'hélice $= 30° \to 30° = \arctan(\frac{c}{r}) \;\Leftrightarrow\; \frac{c}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Alors, en utilisant la formule de longueur d'arc :

$$L = T \cdot \sqrt{r^2 + c^2} = T \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} r\right)^2 + r^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot T \cdot r = 2 \cdot T \cdot c = 2 \cdot h = 2$$

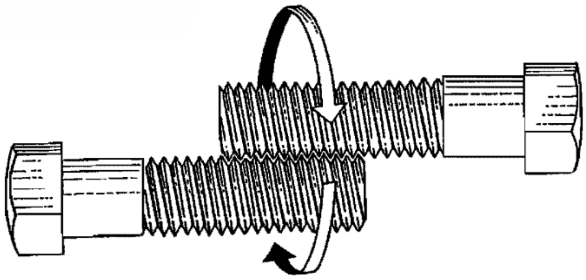
Résultat intéressant :
La longueur de la bande rouge dépend uniquement de la hauteur du cylindre et de l'angle de l'hélice. Elle est complètement **indépendante** du rayon du cylindre ! Quel que soit le rayon du cylindre, tant que l'angle de l'hélice est 30°, la longueur de la bande est toujours égale au double de la hauteur.

[8] Énigme et solution incluses dans : Martin Gardner. The Sixth Book of Mathematical Diversions. University of Chicago Press, 1984. isbn: 0226282503. p.8

[9] Source de l'image : `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Barber%27s_signboard.jpg`

[10] Tracer le triangle rectangle de hauteur h et d'hypoténuse L. En le doublant, on obtient un triangle équilatéral. Comme h vaut la moitié du côté L, on obtient $L = 2 \cdot h$.

Les boulons tournoyants (se tourner les "boulons")[11]



Deux boulons identiques sont placés ensemble de sorte que leurs rainures hélicoïdales s'emboîtent. Si l'on fait tourner les boulons l'un autour de l'autre comme lorsque l'on se tourne les pouces, en tenant fermement chaque boulon par la tête afin qu'il ne tourne pas sur lui-même, et en les faisant tourner dans le sens indiqué, les têtes vont-elles

(a) se rapprocher,

(b) s'éloigner

(c) rester à la même distance l'une de l'autre ?

Le problème doit être résolu sans recourir à une expérimentation réelle.

Solution officielle : Les boulons tournoyants ne se déplacent ni vers l'intérieur ni vers l'extérieur. Ils se comportent comme quelqu'un qui monte un escalator descendant : il reste toujours au même endroit.

Droite serrée, gauche desserrée[12]**:**

Les boulons suivent la règle usuelle du filetage : une rotation dans le sens horaire serre, tandis qu'une rotation dans le sens antihoraire desserre. Lorsque l'on fait tournoyer les boulons, le mouvement apparaît horaire d'un côté et antihoraire du côté opposé. Ainsi, lorsqu'un boulon aurait tendance à se serrer, l'autre aurait tendance à se desserrer, ce qui annule l'effet et produit un déplacement net nul.

D'autres explications, plus visuelles, se trouvent sur les sites suivants (en anglais) :
`https://leancrew.com/all-this/2025/03/a-sciam-bolt-puzzle/`
`https://puzzles.nigelcoldwell.co.uk/eightyfour.htm`.

[11]Énigme et solution incluses dans : Martin Gardner. The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems. W. W. Norton & Company, 2001. isbn: 978-0393020236; p.124

[12]`https://puzzling.stackexchange.com/questions/52415/martin-gardners-the-twiddled-bolts`

Exercice de calcul[13]

Déterminer l'ombre de l'hélice définie par les équations paramétriques

$$x = r\cos(t), y = r\sin(t), z = ct$$

sur le plan (xOy), sachant que les rayons lumineux sont parallèles à la tangente au point $t = 0$.

Formules nécessaires :

1. Soit $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe régulière[a]. Alors le **vecteur tangent en** $\mathbf{r}(t_0)$ est donné par

$$\vec{T}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=t_0}$$

2. **Expression d'une droite dans l'espace :**
   Une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ peut être définie par un système d'équations paramétriques :

$$M(x;y;z) \in d \iff \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x = x_A + \lambda \cdot x_u \\ y = y_A + \lambda \cdot y_u \\ z = z_A + \lambda \cdot z_u \end{cases}$$

[a]Régulière = dérivable avec une dérivée non nulle en tout point

[13]https://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/2328910/helice-exercice-simple-et-original

Solution :

(1) On commence par calculer le vecteur tangent au point correspondant à $t = 0$:

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ c \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $t = 0$:

$$\vec{T_0} := \vec{T}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ c \end{pmatrix}$$

Les rayons lumineux sont parallèles à $\vec{T_0}$, donc le vecteur directeur $\vec{v}$ des rayons lumineux est colinéaire au vecteur tangent. On peut choisir $\vec{v} = \vec{T_0}$.

Comme un rayon lumineux l doit passer par un point $P(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ de l'hélice avant de rencontrer le plan (xOy), on peut définir le rayon lumineux l par :

$$\begin{aligned} M(x(t), y(t), z(t)) \in l \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} & \begin{cases} x(t) = x_P + k \cdot x_v \\ y(t) = y_P + k \cdot y_v \\ z(t) = z_P + k \cdot z_v \end{cases} \\ \Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} & \begin{cases} x(t) = r\cos(t) + k \cdot 0 \\ y(t) = r\sin(t) + k \cdot r \\ z(t) = ct + k \cdot c \end{cases} \end{aligned}$$

Le plan (xOy) est défini par $z = 0$. Pour trouver l'intersection du rayon lumineux avec le plan (xOy), on impose $z = 0$ dans l'équation paramétrique du rayon lumineux :

$$z(t) = ct + k \cdot c = 0 \quad \Rightarrow t + k = 0 \quad \Rightarrow k = -t$$

On remplace ensuite $k = -t$ dans l'équation paramétrique du rayon lumineux pour obtenir les coordonnées x et y de l'ombre sur le plan (xOy) :

$$\begin{aligned} x_{shadow} &= r\cos(t) \\ y_{shadow} &= r\sin(t) + (-t) \cdot r = r(\sin(t) - t) \end{aligned}$$

Ainsi, l'ombre de l'hélice est donnée par :

$$x = r\cos(t) \qquad y = r\sin(t) - rt$$

Cette courbe est appelée une **cycloïde**. Une cycloïde peut être décrite comme la courbe tracée par un point d'un cercle lorsque celui-ci roule le long d'une droite.