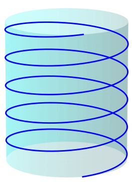
Autres formes d’hélices et spirales

Jusqu’ici, nous nous sommes concentrés sur les **hélices cylindriques** : des courbes qui sont tracées sur un cylindre et qui forment un angle constant avec son axe. Cependant, les cylindres ne sont pas les seules surfaces pouvant porter des courbes hélicoïdales. En remplaçant le cylindre par une autre surface, on obtient différents types d’hélices.

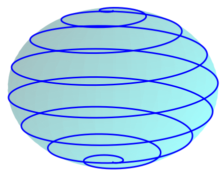
Autres formes d’hélices :

- Une **hélice conique** est tracée sur la surface d’un cône circulaire droit.
  Comme une hélice cylindrique, elle s’enroule autour de l’axe du cône. La principale différence est que le rayon n’est plus constant : lorsqu’un point parcourt la courbe, sa distance à l’axe augmente ou diminue.
- Une **hélice sphérique** est tracée sur la surface d’une sphère.
  Comme une sphère est bornée, la courbe ne peut pas s’étendre indéfiniment. Elle s’enroule donc autour de la sphère tout en restant sur sa surface.
- Une **hélice toroïdale** est tracée sur la surface d’un tore, une surface en forme de beignet. On peut la voir comme une hélice tracée sur un tube cylindrique fermé. Lorsqu’un point parcourt la courbe, il s’enroule autour du tube tout en se déplaçant simultanément autour du trou central du tore.

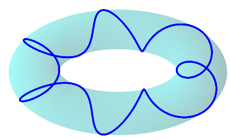


Hélice cylindrique

Hélice conique



Hélice sphérique



Hélice toroïdale

Hélice et spirale

Dans le langage courant, les termes « spirale » et « hélice » sont souvent utilisés de manière interchangeable, comme dans l’expression « escalier en spirale ». Cependant, en mathématiques, ces notions sont distinctes, bien qu’étroitement liées.

Une **spirale** est une **courbe plane (2D)** qui part d’un point central et s’en éloigne progressivement tout en tournant autour de ce point.

En coordonnées $x - y$, la courbe peut être décrite par les équations paramétriques :

$$x = r(t)\cos(t), \qquad y = r(t)\sin(t)$$

où $r(t)$ est une fonction continue et monotone de l’angle t.

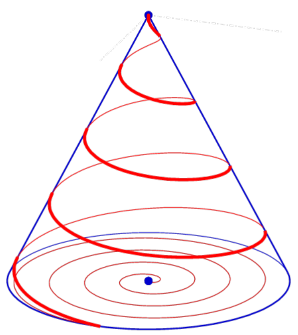
Lien avec les hélices :
Alors que les spirales sont des courbes planes (2D) et les hélices des courbes de l'espace (3D), plusieurs spirales remarquables peuvent être obtenues à partir d'hélices par des projections appropriées.
Exemples remarquables :

- **Spirale d'Archimède :** $r(t) = a \cdot t$, avec $a \in \mathbb{R}$.
  Cette spirale peut être obtenue comme **projection orthogonale** d'une **hélice conique uniforme** sur la base du cône.

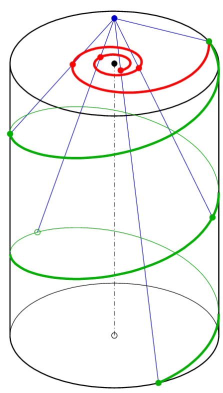
- **Spirale hyperbolique :** $r(t) = \dfrac{a}{t}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
  Cette spirale peut être obtenue comme **projection centrale** d'une **hélice cylindrique** depuis le sommet d'un cône sur un plan.

- **Spirale logarithmique** : $r(t) = a \cdot e^{kt}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$.
  Contrairement aux exemples précédents, la spirale logarithmique n'admet pas de lien géométrique direct avec les hélices.

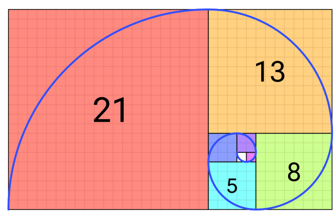
La spirale logarithmique contient la **spirale d'or** pour $k = \dfrac{\ln(\Phi)}{\pi/2}$, où $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Une approximation notable de la spirale d'or est la **spirale de Fibonacci**.



Hélice conique dont la projection au sol est une spirale d'Archimède [5]



Spirale hyperbolique comme projection centrale d'une hélice [6]



Une approximation de la spirale d'or par la spirale de Fibonacci [7]

[5]CC BY-SA 4.0, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spiralconearch-s.svg
[6]CC BY-SA 4.0, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Schraubliniehypspirale.svg
[7]CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fibonacci_spiral_2019.svg