Contrôle terminal

MP1

Decembre 2021

Exercice 3.

On considère le polynôme à coefficients complexes

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3-2i)z + (2i-1).$$

1. Montrer que 1 est une racine du polynôme P. Il s'agit de vérifier que $P(1) = 0$.
2. Déterminer des nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$.
   En effectuant la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminiés, on trouve que $a = 1, b = -2, c = 1 - 2i$.
3. En déduire les solutions z_1, z_2, z_3 dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
   Par (1.), $z_1 = 1$, et par (2.), z_2, z_3 sont les deux racines de l'équation $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$, qui sont $-i$ et $2 + i$.
4. On se place dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.
   (a) Placer les points M_1, M_2 et M_3 d'affixe respective z_1, z_2, z_3 dans le plan. $M_1 = (1, 0), M_2 = (0, -1), M_3 = (2, 1)$.
   (b) Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points M_1 et M_2 et justifier que M_3 appartient á $\mathcal{D}$. L'équation de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1,$$

   et $M_3 = (2, 1)$ vérifie bien cette équation.

Exercice 4.

Soit α est un paramètre réel et Q_α la matrice $Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Calculer Q_α^2 et montrer que pour tout réel α : $Q_\alpha^2 = (2\alpha+1)Q_\alpha + (1-\alpha)(2+\alpha)I_3$.

$$Q_\alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2+2 & 2\alpha+1 & 2\alpha+1 \\ 2\alpha+1 & \alpha^2+2 & 2\alpha+1 \\ 2\alpha+1 & 2\alpha+1 & \alpha^2+2 \end{pmatrix}.$$

2. Pour quels α la matrice Q_α ?
En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on obtient la forme échelonnée de Q_α suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(\alpha+2) \end{pmatrix}.$$

Donc, Q_α est inversible si et seulement si $\alpha \notin \{-2, 1\}$.

3. Quel est l'inverse de Q_α dans ce cas ?
Par (1.),

$$Q_\alpha \cdot \frac{1}{(1-\alpha)(2+\alpha)}(Q_\alpha - (2\alpha+1)I_3) = I_3.$$

On en déduit que

$$Q_\alpha^{-1} = \frac{1}{(1-\alpha)(2+\alpha)}(Q_\alpha - (2\alpha+1)I_3) = \frac{1}{(1-\alpha)(2+\alpha)}\begin{pmatrix} -\alpha-1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha-1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Soit a, b et c trois nombres réels fixés. On considère le système suivant, d'inconnues x, y et z :

$$S_{(a,b,c)} = \begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y + = b \\ x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

I. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant vos réponses :

1. Lorsque $a = b = c = 0$ le système admet au moins une solution.
Vraie. $x = y = z = 0$ est une solution.

2. Le système admet toujours une solution.
$S_{(a,b,c)}$ admet toujours une solution si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 3. Comme la forme échelonnée de M est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2, l'affirmation est fausse.

3. Si $b = 1, c = -1$ et $a = 0$ le système admet au moins une solution. Vraie. $x = 0, y = 1, z = -2$ est une solution.

4. Pour tout y, le triplet (x, y, z) où $x = 2a - c - y$ et $z = c - a - y$ est solution du système.
Vraie si et seulement si $2a - c = b$.

5. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible. Fausse. Cette matrice est inversible si et seulement si le système admet toujours une solution, ce qui est faux (voir 2).

II. On suppose désormais que $a = b = c = 1$.

1. Justifier que l'ensemble des solutions du système $S_{(1,1,1)}$ détermine une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une équation paramétrique.

   La matrice augmentée associée au système $S_{(1,1,1)}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et sa forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble des solution du système $S_{(1,1,1)}$ est donc

   $$\{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$$

   qui est une droite dans $\mathbb{R}^3$ dont une équation paramétrique est

   $$(1, 0, 0) + t(0, 1, -1) = (1, t, -t).$$

2. Soit les points $A = (0, 1, 0)$ et $B = (-1, 2, 0)$.
   Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite (AB).
   Une équation paramétrique de la droite (AB) est

   $$(0, 1, 0) + s(-1 - 0, 2 - 1, 0 - 0) = (-s, 1 + s, 0).$$

   L'ensemble des points dans l'intersection de $\mathcal{D}$ et (AB) est ainsi

   $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R}, (x, y, z) = (1, t, -t) = (-s, 1 + s, 0)\} = \{(1, 0, 0)\}.$$