FORMES NORMALES POUR LES CHAMPS CONFORMES PSEUDO-RIEMANNIENS

par Charles Frances & Karin Melnick

Résumé. — Nous établissons des formes normales pour les champs conformes sur une variété pseudo-riemannienne, au voisinage d'une singularité. Sur une variété lorentzienne analytique, nous montrons qu'ou bien un tel champ est linéarisable au voisinage de la singularité, ou bien la variété est conformément plate. Dans tous les cas, le champs est localement conjugué à une forme normale sur un espace modèle. Pour des métriques lisses de signature quelconque, nous obtenons un résultat analogue sous l'hypothèse supplémentaire que la différentielle du flot au point fixe est bornée.

Abstract (*Normal forms for conformal vector fields*). — We establish normal forms for conformal vector fields on pseudo-Riemannian manifolds in the neighborhood of a singularity. For real-analytic Lorentzian manifolds, we show that the vector field is analytically linearizable or the manifold is conformally flat. In either case, the vector field is locally conjugate to a normal form on a model space. For smooth metrics of general signature, we obtain the analogous result under the additional assumption that the differential of the flow at the fixed point is bounded.

Charles Frances, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex • *E-mail :* `charles.frances@math.u-psud.fr`
Url : `http://www.math.u-psud.fr/~frances/`
Karin Melnick, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742 • *E-mail :* `karin@math.umd.edu`
Url : `http://www2.math.umd.edu/~kmelnick/`

C. Frances a bénéficié du projet ANR *Geodycos*. K. Melnick a bénéficié du soutien du National Science Foundation fellowship DMS-855735 et remercie l'Insitut Erwin Schrödinger, où elle a passé deux mois pendant l'écriture de cet article.

1. Introduction

Cet article étudie l'allure locale des champs de vecteurs conformes, c'est-à-dire les champs de vecteurs lisses X sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) qui satisfont $\mathcal{L}_X g = \sigma g$, pour une certaine fonction $\sigma \in C^\infty(M)$. Ce sujet a déjà fait l'objet d'une littérature abondante, notamment dans le cadre des champs de vecteurs conformes sur les espaces-temps, c'est-à-dire les variétés lorentziennes (voir en particulier [BCH], [Ca1], [Ca2], [KR1], [KR2], [KR3], et [St]).

À titre d'exemple, commençons par décrire une famille intéressante de champs conformes, qui va jouer un rôle fondamental dans tout l'article. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), $1 \leq p \leq q$, le projectivisé du cône de lumière d'une forme quadratique de signature $(p+1, q+1)$ est naturellement muni d'une structure pseudo-riemannienne conforme de signature (p, q). Ce projectivisé, muni de cette structure conforme naturelle est un espace compact appellé *l'univers d' Einstein* de signature (p, q). On le note $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Le groupe $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$ agit transitivement sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$ par transformations conformes. Soit o un point fixé sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Le stabilisateur de o dans $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$ est un sous-groupe parabolique que nous notons P. Ainsi, du point de vue conforme, $\mathrm{Ein}^{p,q}$ est simplement l'espace homogène $\mathrm{PO}(p+1, q+1)/P$. Maintenant, tout groupe à un paramètre de P donne lieu à un champ de vecteurs conforme sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$, admettant une singularité o. De tels champs conformes seront appelés *champs de Möbius*. Nous verrons que déjà dans le cadre lorentzien, il existe de nombreuses formes locales différentes pour les champs de Möbius au voisinage d'une de leurs singularités.

Soit maintenant (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), avec $p + q \geq 3$, et X un champ de vecteurs conforme sur M s'annulant en un point x_0. L'existence d'une connexion de Cartan canonique associée à la structure conforme $[g]$ permet d'étudier le champ X grâce à la connaissance de son jet d'ordre 2 en x_0. Cette propriété a déjà été utilisée avec succès, par exemple dans [A], ou [NO] pour l'étude des champs de vecteurs projectifs. Dans [FM], puis dans [Fr3], nous avons systématisé cet usage de la connexion de Cartan pour l'étude des champs conformes, et nous avons expliqué comment associer à X un champ de Möbius X_h admettant une singularité en o, que l'on appelle le *champ d'holonomie de X en x_0*. Dans ces précédents travaux, nous avons commencé à établir un dictionnaire entre les propriétés locales de X_h au voisinage de o, et celles de X au voisinage de x_0. Ceci nous a conduit à formuler la question suivante :

QUESTION 1.1. — *En dimension $n \geq 3$, un champ de vecteurs conforme pseudo-riemannien X, est-il toujours localement conjugué, au voisinage d'une singularité x_0, à son champ d'holonomie ?*

Bien entendu, une réponse positive à cette question règlerait de manière très satisfaisante le problème de trouver des formes normales pour les champs conformes au voisinage d'une singularité. On serait en effet ramené à l'étude des champs de Möbius, pour lesquels on peut faire des calculs explicites.

Rappelons que dans le cadre riemannien, la réponse à la Question 1.1 est affirmative. Cela découle du théorème ci-dessous, qui peut s'obtenir à partir des travaux de D. Alekseevskii (voir [A], Section 2). Une preuve détaillée se trouve dans [Fr3], Théorème 1.2.

Théorème. — *Soit (M, g) une variété riemannienne, lisse, de dimension $n \geq 3$, munie d'un champ de vecteurs conforme X. On suppose que X s'annule en $x_0 \in M$. Alors ou bien X est linéarisable, et complet sur un voisinage de x_0, ou bien il existe un voisinage de x_0 qui est conformément plat. Dans tous les cas, le champ X est C^∞-conjugué au voisinage de x_0 à son champ d'holonomie X_h.*

1.1. Énoncés des résultats. — Le but du présent article est de répondre, au moins partiellement, à la Question 1.1 dans le cadre des signatures autres que riemanniennes. On obtient en particulier un résultat complet pour les structures conformes lorentziennes analytiques :

Théorème 1.2. — *Soit (M, g) une variété lorentzienne, analytique, de dimension $n \geq 3$. Soit X un champ de vecteurs conforme analytique sur M, admettant une singularité x_0. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Dans les deux cas, le champ X est analytiquement conjugué au voisinage de x_0 à son champ d'holonomie X_h.

Dans certains cas, on peut obtenir un résultat de même nature, en signature (p, q) générale, et toujours pour des structures analytiques. Avant de l'énoncer, précisons que si X est un champ de vecteurs conformes ayant une singularité x_0, alors la différentielle du flot local de X en x_0, notée $D_{x_0}\phi_X^t$, est définie pour tout $t \in \mathbf{R}$, et détermine, à conjugaison près, un sous-groupe à un paramètre de transformations conformes linéaires de $\mathrm{CO}(p, q)$.

Théorème 1.3. — *Soit (M, g) une variété analytique, pseudo-riemannienne, de dimension $n \geq 3$, et X un champ de vecteurs conforme sur M, admettant une singularité en x_0. On suppose que $\{D_{x_0}\phi_X^t\}_{t \in \mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre semi-simple sur $\mathbf{C}$. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Dans les deux cas, X est analytiquement conjugué au voisinage de x_0 à son champ d'holonomie X_h.

Sans faire d'hypothèse d'analyticité, nos méthodes permettent encore d'obtenir des informations sur l'allure locale de certains champs conformes. Un champs conforme sur (M, g) est *essentiel* si son flot local ne préserve aucune métrique de la classe conforme $[g]$. Il est dit *inessentiel* sinon.

THÉORÈME 1.4. — *Soit (M, g) une variété lisse, pseudo-riemannienne, de dimension $n \geq 3$, et X un champ de vecteurs conforme sur M, admettant une singularité en x_0. On note $\{\phi_X^t\}$ le flot local engendré par X sur M, et on suppose que $\{D_{x_0}\phi_X^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre relativement compact de $CO(T_{x_0}M)$. Alors :*

1. *Ou bien il existe un voisinage U de x_0 sur lequel X est complet et engendre un flot relativement compact dans Conf(U). Dans ce cas X est linéarisable en x_0, et est inessentiel sur U.*
2. *Si l'on n'est pas dans le premier cas, X est essentiel sur tout voisinage de x_0. Dans ce cas, (M, g) possède un ouvert conformément plat et contenant x_0 dans son adhérence.*

Ce résultat est une étape essentielle dans les preuves des Théorèmes 1.2 et 1.3. Nous verrons que dans le cas (2) du théorème, on a de plus une description dynamique relativement précise du flot $\{\phi_X^t\}$ au voisinage de la singularité x_0, ainsi qu'une description géométrique de l'ouvert où $[g]$ est conformément plate (voir les énoncés des Théorèmes 4.1 et 4.3).

Il est naturel de se demander s'il ne serait pas possible d'améliorer les conclusions dans le cas (2) du théorème en montrant qu'un voisinage de la singularité x_0 doit être conformément plat. Il n'en est rien, par exemple lorsque la signature est lorentzienne, comme le montrent les exemples de la Section 6 de [Fr1]. Toutefois, si l'on fait une hypothèse de compacité sur M, on peut raisonablement espérer des conclusions plus fortes. En particulier :

QUESTION 1.5. — *Soient (M, g) et X comme dans le Théorème 1.4. On suppose que M est compacte, et que le flot global $\{\phi_X^t\}$ n'est pas relativement compact dans Conf(M). La variété (M, g) est-elle forcément conformément plate ?*

Dans cette direction, le second auteur et Andreas Čap ont récemment étudié des flots essentiels sur des géométries paraboliques générales dans [ČM]. Ils ont étendu des outils développés dans [NO] et le présent article, et les ont appliqués à diverses géométries pour obtenir des descriptions dynamiques au voisinage de points fixes et montrer, dans certains cas, l'annulation de la courbure.

1.2. Résumé de l'article.— Les preuves des théorèmes de cet article sont basées sur l'idée que certains comportements dynamiques locaux de transformations conformes ne peuvent advenir que sur des structures conformément plates. Par exemple, en signature riemannienne, si une transformation conforme est une contraction topologique sur un ouvert, on montre par un argument classique que cet ouvert est conformément plat. Toutefois, la situation se complique en signature quelconque : nous donnerons, en dernière section de l'article, un exemple de contraction linéaire agissant conformément pour une structure pseudo-riemannienne qui n'est pas conformément plate. Par ailleurs, à partir de la signature lorentzienne, les motifs dynamiques locaux des transformations conformes sont plus nombreux et subtils que de simples contractions topologiques. Il faut donc des outils pour comprendre précisément la dynamique conforme locale.

Le lecteur trouvera en Section 2 quelques rappels sur les structures conformes pseudo-riemanniennes, et leur interprétation comme géométries de Cartan. Puis, dans la Section 3, nous introduisons notre outil dynamique principal : l'holonomie associée à une suite de transformations conformes. Il s'agit d'une suite de transformations conformes du modèle $\mathrm{Ein}^{p,q}$, qui permet d'étudier la dynamique des transformations conformes d'origine (voir la Proposition 3.2 et le Théorème 3.3). Les preuves des Théorèmes 1.4 et 1.3 sont données dans la Section 4. Celle du Théorème 1.2 est l'objet de la Section 5. Il s'agit de la plus longue, car elle utilise tous les résultats antérieurs, ainsi qu'une connaissance assez poussée de la dynamique conforme dans l'espace modèle lorentzien $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$.

2. Rappels géométriques

Cette section est consacrée à une brève description de la géométrie de l'espace modèle $\mathrm{Ein}^{p,q}$, ainsi qu'à l'interprétation des structures conformes en dimension ≥ 3 en termes de géométrie de Cartan. On note $n = p + q$ et on suppose que $p \leq q$.

2.1. L'espace modèle : univers d'Einstein. — Considérons $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$, l'espace $\mathbf{R}^{p+q+2}$ muni de la forme quadratique :

$$Q^{p+1,q+1}(x) := 2x_0 x_{p+q+1} + \cdots + 2x_p x_{q+1} + \Sigma_{p+1}^{q} x_i^2$$

dont le cône isotrope est noté $\mathcal{N}^{p+1,q+1}$. La restriction de $Q^{p+1,q+1}$ fournit une métrique dégénérée sur $\mathcal{N}^{p+1,q+1} \setminus \{0\}$, dont le noyau est de dimension 1, et est tangent aux génératrices du cône. Ainsi, le projectivisé $\mathbf{P}(\mathcal{N}^{p+1,q+1} \setminus \{0\})$ est une sous-variété lisse de $\mathbf{RP}^{p+q+1}$, naturellement munie d'une classe conforme de métriques non dégénérées, de signature (p,q). On appelle *univers d'Einstein* de signature (p,q), et l'on note $\mathrm{Ein}^{p,q}$, cette variété compacte $\mathbf{P}(\mathcal{N}^{p+1,q+1} \setminus \{0\})$ munie de la structure conforme ci-dessus. Il s'agit d'un espace remarquable au sein des structures conformes de signature (p,q), et nous renvoyons le lecteur à [BCDGM] et [Fr2, Chap. 4] pour une étude détaillée dans le cadre lorentzien, ainsi qu'à [FM, Sec. 3] pour le cas général de la signature (p,q).

Commençons par dire quelques mots sur le groupe des transformations conformes de $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Si $\mathrm{O}(p+1,q+1)$ désigne le groupe des applications linéaires qui laissent $Q^{p+1,q+1}$ invariante, alors l'action naturelle de $\mathrm{PO}(p+1,q+1)$ sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$ préserve clairement la classe conforme de $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Il s'avère que $\mathrm{PO}(p+1,q+1)$ est en fait tout le groupe des transformations conformes de $\mathrm{Ein}^{p,q}$; c'est le contenu du théorème de Liouville. L'action de $\mathrm{PO}(p+1,q+1)$ est transitive sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$. On peut donc représenter $\mathrm{Ein}^{p,q}$ comme un espace homogène $\mathrm{PO}(p+1,q+1)/P$, où P est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{PO}(p+1,q+1)$, que nous supposerons être par la suite le stabilisateur du point $o=[e_0]$.

2.1.1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$. — L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$ est composée des matrices X de taille $(n+2)\times(n+2)$ qui satisfont l'identité :

$$X^t J_{p+1,q+1} + J_{p+1,q+1} X = 0.$$

Ici, $J_{p+1,q+1}$ est la matrice, dans la base $(e_0,\dots,e_{n+1})$, de la forme quadratique $Q^{p+1,q+1}$.

L'algèbre $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$ s'écrit comme une somme $\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{n}^+$, où :

$$\mathfrak{r} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & M & \\ & & -a \end{pmatrix} : \quad \begin{matrix} a\in\mathbf{R} \\ M\in\mathfrak{o}(p,q) \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x^t.J_{p,q} & 0 \\ & 0 & x \\ & & 0 \end{pmatrix} : \quad x\in\mathbf{R}^{p,q} \right\}$$

$$\mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ x & 0 & \\ 0 & -x^t.J_{p,q} & 0 \end{pmatrix} : \quad x\in\mathbf{R}^{p,q} \right\}$$

On va aussi considérer la sous-algèbre $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}(p+1,q+1)$, constituée des matrices :

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_{p+1} & & & & \\ & & & 0_{q-p} & & & \\ & & & & -\alpha_{p+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\alpha_1 \end{pmatrix} : \quad \alpha_1,\dots,\alpha_{p+1}\in\mathbf{R} \right\}.$$

Le sous groupe fermé de P dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{a}$ est noté A. On appelle $\mathfrak{a}^+$ le sous-ensemble de $\mathfrak{a}$ pour lequel $\alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_{p+1}\geq 0$, et $A^+ := e^{\mathfrak{a}^+}$.

2.1.2. Cartes conformes. — Deux cartes intéressantes nous seront utiles par la suite. La première est $j:\mathbf{R}^{p,q}\to\mathrm{Ein}^{p,q}$ donnée en coordonnées projectives sur $\mathbf{RP}^{p+1,q+1}$ par :

$$j : (x_1, \dots, x_n) \to [-\frac{Q^{p,q}(x)}{2} : x_1 : \dots : x_n : 1]$$

Il s'agit d'un plongement conforme qui envoie l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q}$ sur un ouvert dense de $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Ainsi $\mathrm{Ein}^{p,q}$ est un espace localement conformément plat. Le complémentaire de $j(\mathbf{R}^{p,q})$ dans $\mathrm{Ein}^{p,q}$ est le cône de lumière de sommet o, c'est-à-dire l'ensemble des géodésiques de type lumière passant par o. L'ouvert $j(\mathbf{R}^{p,q})$ est invariant par P, et l'application j conjugue l'action affine de $\mathrm{CO}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^{p,q}$ à l'action de P sur $j(\mathbf{R}^{p,q})$; en particulier, $P \cong \mathrm{CO}(p,q) \ltimes \mathbf{R}^n$. Le groupe A sera souvent vu, via ces cartes, comme un sous-groupe de transformations conformes linéaires et diagonales de $\mathbf{R}^{p,q}$. Les éléments de A^+ sont des transformations de $\mathrm{CO}(p,q)$ de la forme :

$$h = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ avec } \lambda_i \geq 1, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Notons que la carte j ne contient pas le point o, ni son cône de lumière. Nous avons une seconde carte, dite *carte à l'infini* :

$$j^o : (x_1, \dots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \dots : x_n : -\frac{Q^{p,q}(x)}{2}].$$

L'application j^o est un difféomorphisme conforme de $\mathbf{R}^{p,q}$ sur un ouvert de $\mathrm{Ein}^{p,q}$ contenant o.

Notons que j et j^o ne suffisent pas à recouvrir $\mathrm{Ein}^{p,q}$ (sauf dans le cas de la sphère, $p = 0$), mais ce ne sera pas un problème pour la suite.

2.2. Structures conformes et géométries de Cartan. — Dans ce qui suit, nous allons utiliser intensivement le fait qu'en dimension $n \geq 3$, les structures pseudo-riemanniennes conformes sont ce que l'on appelle des *géométries de Cartan*. Ceci est résumé par le théorème suivant, appelé aussi *principe d'équivalence*, dont le lecteur pourra trouver une preuve dans [Ko, Th. 4.2] ou [Sh, Chap. 7, Prop. 3.1] :

THÉORÈME 2.1 (E. Cartan). — *Soit $(M,[g])$ une structure conforme pseudo-riemannienne de signature (p,q), $p+q \geq 3$. Alors $(M,[g])$ définit de manière unique un triplet (M,B,ω) où :*

1. *B est un P-fibré principal au-dessus de M.*
2. *La forme ω est une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$, satisfaisant :*
   (a) *Pour chaque $b \in B$, $\omega_b : T_bB \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
   (b) *Pour tout $p \in P$, si R_p désigne l'action à droite de p sur B, $(R_p)^*\omega = (Ad\, p^{-1}) \circ \omega$.*
   (c) *Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $b \in B$, $\omega_b(\frac{d}{dt}\big|_{t=0} R_{e^{tX}}.b) = X$.*

Réciproquement, tout triplet (M,B,ω) comme ci-dessus définit une structure conforme de signature (p,q) sur $(M,[g])$.

Dans le cas du modèle $\mathrm{Ein}^{p,q} = \mathrm{PO}(p+1, q+1)/P$, le P-fibré principal B est le groupe de Lie $G = \mathrm{PO}(p+1, q+1)$, et la forme ω est la forme de Maurer-Cartan sur G, qui sera notée ω_G par la suite. On notera π_G la projection $G \to \mathrm{Ein}^{p,q} = G/P$. Le théorème précédent dit que toute structure conforme peut être interprétée comme une version courbe de ce modèle plat.

Dans la suite de l'article, le triplet (M, B, ω) donné par le Théorème 2.1 sera appelé *fibré normal de Cartan* associé à la structure conforme $(M, [g])$.

2.3. Application exponentielle. — Soit $(M, [g])$ une structure conforme de signature (p, q), $p + q \geq 3$, et (M, B, ω) le fibré normal de Cartan qui lui est associé. Tout choix d'un vecteur $Z \in \mathfrak{g}$ définit un champ de vecteurs $\hat{Z}$ sur B, caractérisé par $\omega(\hat{Z}) \equiv Z$. Ceci permet de définir une application exponentielle sur un voisinage $\mathcal{W}$ de $B \times \{0\}$ dans $B \times \mathfrak{g}$:

$$\exp : \mathcal{W} \to B$$
$$\exp(b, Z) = \phi^1_{\hat{Z}}.b$$

où $\phi^t_{\hat{Z}}$ désigne le flot local associé au champ de vecteurs $\hat{Z}$.

Si $\lambda : I \to B$ et $p : I \to P$ sont deux courbes de classe C^1, et si l'on pose $\gamma(s) = \lambda(s).p(s)$, alors :

$$\omega(\gamma'(s)) = (\mathrm{Ad}\ p(s))^{-1} \circ \omega(\lambda'(s)) + \omega_G(p'(s)). \tag{1}$$

Cette relation découle du troisième point de (2), dans le Théorème 2.1 (voir [Sh, Ch 5]). Si l'on prend $p(s)$ constant égal à p, on voit que

$$\exp(b.p, t(\mathrm{Ad}\ p)^{-1}.\xi) = \exp(b, t\xi).p. \tag{2}$$

Par ailleurs, la connexion de Cartan ω conduit à la notion fondamentale de développement des courbes, d'une structure conforme $(M, [g])$ dans le modèle $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Soit I un intervalle $[0, a]$. Pour $b \in B$ soit $\hat{\alpha} : I \to B$ une courbe de classe C^1, telle que $\hat{\alpha}(0) = b$. On appelle *développement de* $\hat{\alpha}$ *en* b, noté $\mathcal{D}_b(\hat{\alpha})$ l'unique courbe $\hat{\beta} : I \to G$ satisfaisant $\hat{\beta}(0) = 1_G$ et $\omega(\alpha') \equiv \omega_G(\beta')$. Soit maintenant $x \in M$, $b \in B$ au-dessus de x, et $\alpha : I \to M$ une courbe de classe C^1 telle que $\alpha(0) = x$, alors on définit son *développement en* x*, relativement à* b par :

$$\mathcal{D}^b_x(\alpha) := \pi_G \circ \mathcal{D}_b(\hat{\alpha}),$$

où $\hat{\alpha}$ est un relevé de α dans B, tel que $\hat{\alpha}(0) = b$. La définition de $\mathcal{D}^b_x(\alpha)$ est indépendante du relevé $\hat{\alpha}$ choisi [Sh, Prop 5.4.13].

2.3.1. Géodésiques conformes. — Nous appellerons *géodésique conforme paramétrée* toute courbe de la forme $s \mapsto \pi(\exp(b, s\xi))$, où s décrit un intervalle $I = (-\delta, \delta)$, et ξ appartient à $(\mathrm{Ad}\ P).\mathfrak{n}^-$. Le support géométrique d'une géodésique α sera noté $[\alpha]$ dans ce qui suit.

Des expressions matricielles données en Section 2.1.1, on déduit facilement que l'image par j d'une droite de $\mathbf{R}^{p,q}$ paramétrée affinement est une géodésique conforme paramétrée de $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Toutes les géodésiques conformes paramétrées de $\mathrm{Ein}^{p,q}$ définis sur tout $\mathbf{R}$ sont obtenues en composant les géodésiques ci-dessus avec des éléments de $\mathrm{PO}(p+1,q+1)$. Nous voyons donc que le vecteur tangent v aux points d'un segment géodésique conforme est de type constant : *type temps* si $\langle v,v\rangle < 0$ par rapport à n'importe quelle métrique de la classe conforme de $\mathrm{Ein}^{p,q}$, *type espace* si $\langle v,v\rangle > 0$, et *type lumière* si $\langle v,v\rangle = 0$. Enfin, observons que les segments géodésiques conformes de type temps, ou espace, issus de o, auxquels on a ôté le point o, sont les images par j des demi-droites de $\mathbf{R}^{p,q}$.

Remarquons que toutes les géodésiques conformes complètes de $\mathrm{Ein}^{p,q}$ se compactifient en des cercles lisses, par adjonction d'un point. Dans le cas des géodésiques de type lumière, ces compactifications sont les projections sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$ des plans totalement isotropes de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$. On désignera souvent ces objets comme étant les *géodésiques de lumière* (non paramétrées) *de* $Ein^{p,q}$.

2.3.2. Normes et métriques auxiliaires. — On munit $\mathbf{R}^{p,q}$ du produit scalaire euclidien
$$b(x,y) := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$
et l'on note $||x||$ la norme associée. On transporte cette métrique euclidienne par l'application j^o, et l'on obtient une métrique ρ^o sur $j^o(\mathbf{R}^{p,q})$. Cette métrique induit, par l'action simplement transitive de $N^- < G$ sur $j^o(\mathbf{R}^{p,q})$, un produit scalaire sur $\mathfrak{n}^-$, et une norme que l'on note $||\cdot||_{\mathfrak{n}^-}$. Dans la suite, on notera $\mathcal{B}(0,r)$ la boule de centre 0 et de rayon r dans $\mathfrak{n}^-$, relativement à la norme $||\cdot||_{\mathfrak{n}^-}$ et $\mathcal{S}(0,r)$ la sphère correspondante. On notera également $B(o,r) := e^{\mathcal{B}(0,r)}$ et $S(o,r) := e^{\mathcal{S}(0,r)}$. Remarquons que $B(o,r)$ et $S(o,r)$ sont, respectivement, la boule et la sphère de rayon r, centrées en o, pour la métrique ρ^o.

2.3.3. Transformations conformes et application exponentielle. — Soit $(M,[g])$ une structure conforme pseudo-riemannienne, et (M,B,ω) le fibré normal de Cartan.

Si $x \in M$ et $b \in B$ est dans la fibre de x, on a un isomorphisme naturel :
$$\iota_b : \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \to T_xM$$
que l'on définit par $\iota_b(\overline{\xi}) := D_b\pi(\omega_b^{-1}(\xi))$, où ξ est n'importe quel représentant de la classe $\overline{\xi} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Les relations d'équivariance de ω impliquent que pour tout $b \in B$, $p \in P$:
$$\iota_{b.p^{-1}}((\overline{\mathrm{Ad}}\ p).\overline{\xi}) = \iota_b(\overline{\xi}), \tag{3}$$
où l'on a noté $\overline{\mathrm{Ad}}$ l'action adjointe sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Par ailleurs, toute transformation conforme locale f d'un ouvert de M dans M se remonte en un automorphisme local du fibré B, qui satisfait $f^*\omega = \omega$. Nous utiliserons fréquemment les deux relations fondamentales suivantes :

$$f(\exp(b,\xi)).p^{-1} = \exp(f(b).p^{-1}, (\mathrm{Ad}\ p).\xi), \tag{4}$$

ainsi que

$$D_x f(\iota_b(\xi)) = \iota_{f(b)}(\xi). \tag{5}$$

2.3.4. Ensembles convexes. — Soit $\lambda^{p,q}$ un produit scalaire de signature (p,q) sur $\mathfrak{n}^-$, qui soit invariant par l'action adjointe de $\mathrm{O}(p,q) < P$. Par construction même du fibré normal de Cartan, pour tout $x \in M$ et $b \in B$ dans la fibre de x, on a $\iota_b^*([g_x]) = [\lambda^{p,q}]$, avec $[g_x]$ la classe conforme sur T_xM et $[\lambda^{p,q}]$ la classe des métriques $\alpha\lambda^{p,q}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, sur $\mathfrak{n}^-$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathfrak{n}^-$ contenant 0. Le cône isotrope $\mathcal{N}(\mathfrak{n}^-)$ de $\lambda^{p,q}$ divise $\mathcal{U}$ en deux ouverts :

- l'ouvert $\mathcal{U}^+ := \{\xi \in \mathcal{U} \mid \lambda^{p,q}(\xi,\xi) > 0\}$, qui est aussi connexe.

- l'ouvert $\mathcal{U}^- := \{\xi \in \mathcal{U} \mid \lambda^{p,q}(\xi,\xi) < 0\}$. Cet ouvert est connexe si $p \geq 2$, vide si $p = 0$, et possède deux composantes connexes si $p = 1$.

Il est clair que $\mathcal{U}^+$ et $\mathcal{U}^-$ demeurent inchangés si l'on remplace $\lambda^{p,q}$ par $\alpha\lambda^{p,q}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

On dira qu'un ouvert $U \subset M$ est *convexe* s'il est difféomorphe à un ouvert convexe $\mathcal{U} \subset \mathfrak{n}^-$ contenant 0 via l'application $\pi \circ \exp(b,\cdot)$, avec $b \in B$. Si $U = \exp(b,\mathcal{U})$ est un ouvert convexe, on notera $U^+ := \exp(b,\mathcal{U}^+)$ et $U^- := \exp(b,\mathcal{U}^-)$. Par exemple, pour r petit, les voisinages $B(o,r)$ sont convexes, et on notera $B^{\pm}(o,r) = e^{\mathcal{B}(0,r)^{\pm}}$.

L'algèbre des champs de vecteurs conforme sur M sera notée $\chi^{co}(M)$ dans la suite.

3. Holonomie

Dans toute cette section, on désigne par (M,g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p,q), $p+q \geq 3$. Le fibré normal de Cartan associé à la structure conforme $(M,[g])$ est noté (M,B,ω). On considère $X \in \chi^{co}(M)$ admettant une singularité $x_0 \in M$.

3.1. Champ d'holonomie et suite d'holonomie. — Par construction du fibré normal de Cartan, toute transformation conforme locale f entre ouverts de $(M,[g])$ se remonte en un difféomorphisme entre ouverts de B qui préserve ω. Ce difféomorphisme préserve les champs ω-constants, donc si $f \in \mathrm{Conf}(M)$ et si (b,ξ) appartient au domaine de définition de exp, alors

$$f(\exp(b,\xi)) = \exp(f(b),\xi) \tag{6}$$

Ainsi le flot local ϕ_X^t se remonte sur B et le champ X sur M se remonte en un champ de vecteurs sur B, renoté X, satisfaisant $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Comme l'action de ϕ_X^t sur B préserve un parallélisme, si X n'est pas nul, X est sans singularité sur B (voir [Ko, Thm I.3.2]). On choisit $b_0 \in B$ au-dessus de la singularité x_0 de X. Le flot local ϕ_X^t agit sur B en préservant la fibre de b_0. Il existe donc pour tout $t \in \mathbf{R}$ un élément $h^t \in P$ tel que $\phi_X^t.b_0.h^{-t} = b_0$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\{h^t\}$ constitue un groupe à un paramètre de P, que l'on appelle le *flot d'holonomie de X en x_0, relativement à b_0*. Changer b_0 en $b_0.p$ revient simplement à conjuguer le flot d'holonomie en $\{ph^tp^{-1}\}$. Le flot $\{h^t\}$ définit un champ conforme sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$, avec une singularité en o, que l'on appelle *champ d'holonomie de X en x_0, relativement à b_0*. On note ce champ d'holonomie X_h.

Remarque 3.1. — *Dans le cas où X est un champ de vecteurs conforme sur un voisinage V de o dans $Ein^{p,q}$, alors on a simplement $X_h = X$. C'est une conséquence du fait que le fibré normal de Cartan est la préimage de V dans $(Ein^{p,q}, PO(p+1, q+1), \omega_G)$, et du Théorème de Liouville. On obtient qu'un champ de vecteurs sur une variété conformément plate est toujours localement conjugué, au voisinage d'une singularité, à son champ d'holonomie. La conjugaison est de plus un difféomorphisme conforme.*

Soit maintenant U un ouvert de M et $(f_k : U \to M)$ une suite de plongements conformes. Soit $x \in U$ et supposons que la suite $f_k(x)$ converge vers y lorsque $k \to \infty$. On dit qu'une suite (h_k) de P est une *suite d'holonomie de (f_k) en x* s'il existe une suite (b_k) dans la fibre de x, contenue dans un compact de B, et telle que $f_k(b_k).h_k^{-1}$ soit également contenue dans un compact de B. Si (g_k) est une autre suite d'holonomie de (f_k) en x, il résulte de la propreté de l'action de P sur B que l'on a $h_k = c_k g_k d_k$ $\forall k$, où (c_k) et (d_k) sont deux suites bornées de P. On dit alors que (h_k) et (g_k) sont *équivalentes dans P*. Réciproquement, si (g_k) est une suite d'holonomie de (f_k) en x, alors toute suite (h_k) équivalente à (g_k) dans P est encore une suite d'holonomie de (f_k) en x.

3.2. Stabilité, semi-complétude, et calcul d'holonomie. — Nous rappelons ici la notion de stabilité dynamique, qui va jouer un rôle fondamental pour la suite. Soit U un ouvert de M et $(f_k : U \to M)$ une suite de plongements conformes. On dit que la suite (f_k) est *stable en $x \in U$* si pour toute suite (x_k) de U qui converge vers x, la suite $f_k(x_k)$ converge vers une limite x_∞ indépendante de (x_k). La suite $(f_k : U \to M)$ est *fortement stable en $x \in U$* s'il existe un voisinage V de x ainsi qu'un point $x_\infty \in M$ de sorte que $f_k(\overline{V}) \to x_\infty$. Une caractérisation de la stabilité et de la stabilité forte en termes d'holonomie a été donnée en [Fr4, Lemme 4.3] : *la suite (f_k) est stable en x si et seulement s'il existe une suite d'holonomie (h_k) de (f_k) en x qui soit dans A^+. Autrement dit, h_k est de la forme $h_k = diag(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)) \in CO(p,q)$ avec $\lambda_1(k) \geq \ldots \geq \lambda_n(k) \geq 1$; en particulier les suites $1/\lambda_i(k)$ sont bornées. La suite (f_k) est fortement stable si et seulement si* $1/\lambda_i(k) \to 0$ pour tout i. Des suites d'holonomies comme ci-dessus sont appelées *stables* et *fortement stables*, respectivement.

Lorsque le flot d'holonomie $\{h^t\}$ d'un champ de vecteurs X a la propriété de contracter un segment géodésique $[oz]$, et d'être stable en z, on obtient des propriétés de semi-complétude du flot $\{\phi_X^t\}$ sur tout un ouvert :

Proposition 3.2 (voir les Prop 6.1, Prop 6.3 de [Fr3])

Soit X un champ de vecteurs conforme ayant une singularité en x_0, avec flot d'holonomie $\{h^t\}$ en x_0 relativement à b_0. Il existe $R_0 > 0$ tel que si $\alpha : [0,1] \to M$ est un segment géodésique conforme issu de x_0, dont le développement $\beta = \mathcal{D}_{x_0}^{b_0}(\alpha)$ satisfait à :

- *$h^t.[\beta] \subset B(o, R_0)$ pour tout $t \geq 0$,*
- *$h^t.[\beta] \to o$ lorsque $t \to \infty$,*
- *(h^{t_k}) est stable en $\beta(1)$ pour tout $t_k \to \infty$,*

alors il existe un voisinage V de $\alpha(1)$ tel que :

1. *Le flot ϕ_X^t est défini sur V pour tout $t \geq 0$.*
2. *Le flot ϕ_X^t est défini sur $[\alpha]$ pour tout $t \geq 0$, et $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.[\alpha] \to x_0$.*
3. *Il existe $s_k \to \infty$ telle que $(\phi_X^{s_k})$ soit stable en y pour tout $y \in V$, et toute suite d'holonomie de (h^{s_k}) en $\beta(1)$ soit suite d'holonomie de $(\phi_X^{s_k})$ en y. De plus, si (h^{t_k}) est fortement stable en $\beta(1)$ pour tout $t_k \to \infty$, alors la suite $(\phi_X^{s_k})$ est fortement stable en chaque $y \in V$.*

Dans le cas de cette proposition où toutes les suites (h^{t_k}) sont fortement stables, on peut trouver une suite $(\phi_X^{s_k})$ qui contracte un ouvert V sur x_0. Mais pour montrer l'annulation du tenseur de Weyl sur V, il est nécessaire, au vu de l'exemple donné en Section 6, d'obtenir des informations plus fines, notamment des informations sur les "vitesses de contraction" des différentielles $D_x\phi_X^t$. C'est le but du prochain résultat, le Théorème 3.3.

Soient U un ouvert connexe de M et $(f_k : U \to M)$ une suite de plongements conformes. On suppose que (f_k) est stable en un point $x \in U$. La suite (f_k) admet donc une suite d'holonomie (h_k) qui est dans A^+. Écrivons $h_k = \mathrm{diag}(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))$, avec $\lambda_1(k) \geq \ldots \geq \lambda_n(k) \geq 1$. Il existe s entiers naturels non nuls $n_1, \ldots, n_s$ tels que pour tout $l \in \{0, \ldots, s-1\}$, et tout couple d'indices $n_l + 1 \leq i \leq j \leq n_{l+1}$, le quotient $\frac{\lambda_i(k)}{\lambda_j(k)}$ soit borné dans $[1, \infty)$ (on a adopté la convention $n_0 = 0$). Quitte à remplacer (h_k) par une suite équivalente de P, on peut alors supposer que pour tout $0 \leq l \leq s-1$, et tout couple d'indices $n_l+1 \leq i \leq j \leq n_{l+1}$, $\lambda_i(k) = \lambda_j(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Si $j \in \{1, \ldots, s\}$, on note alors $\mu_j(k) = \frac{1}{\lambda_{n_j}(k)}$. On a $\mu_1(k) \leq \ldots \leq \mu_s(k) \leq 1$, et l'action de Ad h_k sur $\mathfrak{n}^-$ se fait par une transformation diagonale de valeurs propres $\mu_1(k), \ldots, \mu_s(k)$. Quitte à extraire encore, on peut supposer que chaque suite $(\mu_j(k))$ admet une limite dans $\mathbf{R}^+$, et que $\frac{\mu_{j+1}(k)}{\mu_j(k)} \to \infty$, pour tout $j \in \{1, \ldots, s-1\}$. Notons que les suites $\mu_j(k)$ tendent vers 0, sauf éventuellement pour $j = s$. Nous allons maintenant expliciter l'information dynamique que revêtent les suites $\mu_j(k)$.

On munit la variété pseudo-riemannienne (M, g) d'une métrique riemannienne auxiliaire, qui définit une norme $||\cdot||$ sur TM et une distance d sur M. L'énoncé qui suit est indépendant de ce choix d'une métrique auxiliaire. Rappelons que si (a_k) et (b_k) sont deux suites réelles positives, la notation $a_k = \Theta(b_k)$ signifie qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour k suffisamment grand, $C_1 a_k \leq b_k \leq C_2 a_k$. Par $b_k = O(a_k)$, on entend qu'il existe $C > 0$ tel que pour k suffisamment grand, on a $Cb_k \leq a_k$.

Théorème 3.3. — [Fr4, Théorèmes 1.1 et 1.4] *Soit (f_k) une suite stable de transformations locales conformes, définies sur un ouvert U. Quitte à remplacer (f_k) par une suite extraite et à rétrécir U, il existe une filtration de TU, $\mathcal{F}_0 = \{0\} \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_{s-1}$, qui s'intègre en s feuilletages de U, $F_0 \subsetneq \ldots \subsetneq F_{s-1}$, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. (a) *Un vecteur non nul $u \in T_xU$ appartient à $T_xU \setminus \mathcal{F}_{s-1}(x)$, si et seulement si pour toute suite (u_k) de T_xU qui converge vers u,*
$$||D_x f_k(u_k)|| = \Theta(\mu_s(k)).$$
   (b) *Un vecteur non nul $u \in T_xU$ appartient à $\mathcal{F}_j(x) \setminus \mathcal{F}_{j-1}(x)$, $j = 1, \ldots s-1$, si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :*
      (i) *Pour toute suite (u_k) de T_xU qui converge vers u,*
$$\mu_j(k) = O(||D_x f_k(u_k)||).$$
      (ii) *Il existe une suite (u_k) de T_xU qui converge vers u telle que $||D_x f_k(u_k)|| = \Theta(\mu_j(k))$.*
2. *Chaque $x \in U$ admet un voisinage U_x tel que la feuille locale $F_j^{loc}(x)$ de x dans U_x soit caractérisée par :*
   (a) *Un point y appartient à $U_x \setminus F_{s-1}^{loc}(x)$ si et seulement si pour toute suite (y_k) de U_x qui converge vers y,*
$$d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_s(k)).$$
   (b) *Un point y appartient à $F_j^{loc}(x) \setminus F_{j-1}^{loc}(x)$, $j = 1, \ldots s-1$, si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :*
      (i) *Pour toute suite (y_k) de U_x qui converge vers y,*
$$\mu_j(k) = O(d(f_k(x), f_k(y_k))).$$
      (ii) *Il existe une suite (y_k) de U_x qui converge vers y telle que*
$$d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_j(k)).$$

Remarque 3.4. — *Rappelons brièvement comment les espaces $\mathcal{F}_j(x)$ sont construits. On décompose $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ en somme directe $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} = \oplus_{j=1}^{s} \mathcal{N}_j$ où $(Ad\ h_k)_{|\mathcal{N}_j} = \mu_j(k) Id_{\mathcal{N}_j}$. On définit $\mathcal{E}_j := \oplus_{i \leq j} \mathcal{N}_i$ pour $j = \{1, \ldots, s\}$. Alors, il existe $b \in B$*

dans la fibre de x pour lequel $\mathcal{F}_j(x) = \iota_b(\mathcal{E}_j)$. Ainsi, si $s \geq 3$, on a pour tout $x \in U$, $\mathcal{F}_{s-1}(x) = \mathcal{F}_1^{\perp}(x)$ (l'orthogonal est pris pour n'importe quelle métrique de la classe conforme).

REMARQUE 3.5. — *Dans* [Fr4]*, Section 8, on a montré que les suites et les feuilletages du Théorème 3.3 sont uniques : s'il existe r suites $(\nu_1(k)), \ldots, (\nu_r(k))$, avec $\nu_j(k) = o(\nu_{j+1}(k))$, et des sous-variétés $H_0^{loc}(x) := \{x\} \subsetneq H_1^{loc}(x) \subsetneq \ldots \subsetneq H_{r-1}^{loc}(x) \subsetneq U_x$ qui satisfont aux conclusions $2(a)$ et (b) du Théorème 3.3, alors nécessairement, $r = s$; $\mu_j(k) = \Theta(\nu_j(k))$; et $H_{j-1}^{loc}(x) = F_{j-1}^{loc}(x)$, pour $j = \{1, \ldots, s\}$.*

L'intérêt pratique du théorème est qu'il donne des estimations métriques sur la vitesse à laquelle les orbites de (f_k) se rapprochent, à partir de la connaissance des suites $\mu_j(k)$. Réciproquement, en utilisant la propriété d'unicité mentionnée ci-dessus, on peut retrouver les suites $\mu_j(k)$ en calculant à quelle vitesse les orbites de (f_k) se rapprochent, ce qui nous permet de déterminer rapidement des suites d'holonomies. Nous allons illustrer ceci dans les Propositions 4.2 et 4.4, où nous allons calculer l'holonomie de $\{h^t\}$ en des points stables près de o.

Pour donner au lecteur une idée simple de la manière dont on peut combiner la Proposition 3.2 et le Théorème 3.3, nous finissons cette section en montrant :

PROPOSITION 3.6. — *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension ≥ 3, et $X \in \chi^{co}(M)$ admettant une singularité x_0, avec flot d'holonomie $\{h^t\}$ satisfaisante à toutes les hypothèses de la Proposition 3.2.*

1. *Si pour toute suite $t_k \to \infty$, l'holonomie de (h^{t_k}) en $\beta(1)$ admet une sous-suite équivalente dans P à $(diag(\lambda_k, \ldots, \lambda_k)) \in (A^+)^{\mathbf{N}}$, où $\lambda_k \to \infty$, alors il existe un ouvert non vide contenant $\alpha(1)$ qui est conformément plat.*
2. *Si (M, g) est lorentzienne et analytique, et si pour toute suite $t_k \to \infty$, (h^{t_k}) est fortement stable en $\beta(1)$, alors (M, g) est conformément plate.*

Démonstration. — Commençons par la preuve du premier point. La Proposition 3.2 donne l'existence d'un ouvert V contenant $\alpha(1)$, et d'une suite $s_k \to \infty$ de sorte que $\phi_X^{s_k}$ est défini sur V pour tout k, et $(\phi_X^{s_k})$ admet pour holonomie $(h_k) = (\mathrm{diag}(\lambda_k, \ldots, \lambda_k))$ en chaque point de V, avec de plus $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$. En particulier $(\phi_X^{s_k})$ est fortement stable en chaque point de V. On va alors montrer que le tenseur de Weyl associé à (M, g) s'annule sur V. Pour cela, nous utilisons, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, les conclusions du Théorème 3.3. Ici, l'entier s vaut 1 car toutes les suites constituant la diagonale de (h_k) sont équivalentes, en tant que suite de $\mathbf{R}$. On a ainsi $\mu_1(k) = 1/\lambda_k$, qui tend vers 0 lorsque $k \to \infty$. La stratification donnée par le théorème est triviale dans ce cas. Si l'on s'est fixé une métrique auxiliaire λ sur M, et si $|| \cdot ||$ désigne la norme que λ définit sur TM, le point $1(a)$ du Théorème 3.3 affirme que pour tout $y \in V$, et $u \in T_yM$ non nul, on doit avoir :

$$||D_y\phi_X^{s_k}(u)|| = \Theta(\mu_1(k)).$$

Comme $(\phi_X^{s_k})$ est fortement stable en chaque point de V, on peut supposer, quitte à restreindre V, que l'ensemble $\bigcup_{k\geq 0} \phi_X^{s_k}(V)$ est relativement compact dans M. Par conséquent, si W désigne le tenseur de Weyl, on doit avoir sur $\bigcup_{k\geq 0} \phi_X^{s_k}(V)$:

$$||W(u,v,w)|| \leq C||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||,$$

pour une certaine constante $C > 0$. Puis, on utilise l'invariance conforme du tenseur de Weyl ; pour $y \in V$, $u,v,w \in T_yM$, et $k \geq 0$:

$$D_y\phi_X^{s_k}(W_y(u,v,w)) = W_{\phi_X^{s_k}.y}(D_y\phi_X^{s_k}(u), D_y\phi_X^{s_k}(v), D_y\phi_X^{s_k}(w)).$$

Si $W_y(u,v,w)$ n'est pas nul, le point $1(a)$ du Théorème 3.3 donne que $||D_y\phi_X^{s_k}(W_y(u,v,w))|| = \Theta(\mu_1(k))$, tandis que

$$||W_{\phi_X^{s_k}.y}(D_y\phi_X^{s_k}(u), D_y\phi_X^{s_k}(v), D_y\phi_X^{s_k}(w))|| = O(\mu_1(k)^3).$$

On aboutit à une contradiction.

Le même raisonnement assure que le tenseur de Cotton est nul si dim $M = 3$.

Nous passons maintenant au second point de la proposition. La variété (M,g) est supposée lorentzienne et analytique. La Proposition 3.2 donne l'existence d'un ouvert V contenant $\alpha(1)$, et d'une suite $s_k \to \infty$ de sorte que $\phi_X^{s_k}$ est défini sur V pour tout k, et $(\phi_X^{s_k})$ admet une holonomie fortement stable (h_k) en chaque point de V. On applique le Théorème 3.3. Les points $1,(a)$ et $1,(b)$ assurent que pour tout y dans V, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de T_yM tel que $D_y\phi_X^{s_k}(\mathcal{V}) \to 0$. Autrement dit $(\phi_X^{t_k})$ est fortement stable au sens de [Fr1] et les Propositions 4 et 5 de [Fr1] assurent que V est conformément plat. Par analyticité, il en va de même pour (M,g). □

4. Preuve du Théorème 1.4

On considère toujours une structure conforme pseudo-riemannienne $(M,[g])$, de signature (p,q), $p+q \geq 3$. On suppose que X est un élément non trivial de $\chi^{co}(M)$, admettant une singularité en $x_0 \in M$. On appelle (M,B,ω) le fibré normal de Cartan, et $\{h^t\}$ le flot d'holonomie associé à X en x_0, relativement à $b_0 \in B$ au-dessus de x_0. Sous les hypothèses du Théorème 1.4 la partie linéaire de la transformation affine h^t est semi-simple sur $\mathbf{C}$. On montre alors aisément qu'à conjugaison près par une translation, $\{h^t\}$ s'écrit comme le produit commutatif de sa partie linéaire, qui est un groupe à un paramètre relativement compact $\{\kappa^t\}$, et d'un flot de translations $\{\tau^t\}$.

Commençons par étudier le cas où $\{\tau^t\}$ est trivial. Dans ce cas, $h^t = \kappa^t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Par [Fr3, Cor 6.2], il existe un voisinage U de x_0 sur lequel X est complet, et engendre un flot relativement compact $\{\phi_X^t\}$ de transformations conformes de U. On est alors dans le cas (1) du Théorème 1.4. En moyennant une métrique de la classe conforme par $\{\phi_X^t\}$, on construit $\tilde{g}$ sur U pour laquelle X est un champ de Killing. Il est alors clair que X est linéarisable en x_0.

Nous supposerons donc dorénavant que $\{\tau^t\}$ n'est pas trivial. Deux cas vont devoir être considérés séparément : celui où $\{\tau^t\}$ est un flot de translations de type espace ou temps, et celui où $\{\tau^t\}$ est un flot de translations de type lumière.

4.1. Cas où $\{\tau^t\}$ est un flot de translations espace ou temps.

— On va dans cette section démontrer le théorème suivant, qui précise le Théorème 1.4 dans ce cas. Les notations utilisées sont celles de la Section 2.3.4.

Théorème 4.1. — *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), $p + q \geq 3$. Soit $X \in \chi^{co}(M)$, s'annulant en $x_0 \in M$. On suppose que le flot d'holonomie $\{h^t\}$ de X en x_0 est le produit commutatif $\{\kappa^t \cdot \tau^t\}$, avec $\{\kappa^t\}$ relativement compact et $\{\tau^t\}$ un groupe de translations de type espace ou de type temps. Alors il existe un voisinage convexe U de x_0, et deux ensembles $U^>$ et $U^<$ dont la réunion est U^+ si $\{\tau^t\}$ est de type espace, U^- si $\{\tau^t\}$ est de type temps, avec les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in U^>$, le flot $\{\phi_X^t\}$ est défini pour tout $t \geq 0$, et de plus $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.x = x_0$.*
2. *Pour tout $x \in U^<$, le flot $\{\phi_X^t\}$ est défini pour tout $t \leq 0$, et de plus $\lim_{t\to-\infty} \phi_X^t.x = x_0$.*
3. *L'ouvert $(U^+, [g])$ ou $(U^-, [g])$, suivant que $\{\tau^t\}$ est de type espace ou temps, est conformément plat.*

Pour vérifier que les conclusions du Théorème 4.1 impliquent le cas (2) du Théorème 1.4, il reste à montrer que X est essentiel sur tout voisinage de x_0. Mais le flot d'holonomie ne fixe aucun point de l'espace de Minkowski $j(\mathbf{R}^{p,q})$, donc c'est une conséquence de [Fr3, Prop 4.8] (voir aussi [Ca1, Thm 2.1]).

Sur $\mathbf{R}^{p,q}$, on note

$$< x, y >:= x_1 y_n + x_n y_1 + \cdots + x_p y_{q+1} + x_{q+1} y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \cdots + x_q y_q$$

la forme bilinéaire associée à $Q^{p,q}$, et pour simplifier l'écriture, on notera $q(x) := Q^{p,q}(x)$ dans les calculs qui vont suivre. Nous utiliserons également les notations introduites dans la Section 2.3.4.

On pose :

$$e'_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_n), \ldots, e'_p := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_p - e_{q+1})$$
$$e'_{p+1} := e_{p+1}, \ldots, e'_q := e_q$$
$$e'_{q+1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_p + e_{q+1}), \ldots, e'_n := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_n).$$

Quitte à conjuguer $\{h^t\}$ dans P, on peut supposer que τ^t est la translation de vecteur tv avec $v = e'_1$ ou $v = e'_n$. Le groupe $\{\kappa^t\}$ est contenu dans un compact maximal de $\mathrm{Stab}(v) < \mathrm{CO}(p, q)$. Comme v est de norme non nulle, ce stabilisateur est semi-simple, et un compact maximal est un produit $\mathrm{O}(p -$

$1) \times \mathrm{O}(q)$ ou $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q-1)$. Donc si l'on conjugue encore par un élément de P qui laisse v invariant, on peut supposer $\{\kappa^t\}$ de la forme suivante :

– un flot de $\mathrm{O}(p,q)$ laissant $\mathrm{Vect}(e'_2,\dots,e'_p)$ et $\mathrm{Vect}(e'_{p+1},\dots,e'_n)$ stables, dans le cas où $v = e'_1$.
– un flot de $\mathrm{O}(p,q)$ laissant $\mathrm{Vect}(e'_1,\dots,e'_p)$ et $\mathrm{Vect}(e'_{p+1},\dots,e'_{n-1})$ stables, dans le cas où $v = e'_n$.

En particulier, κ^t vu comme transformation linéaire de $\mathbf{R}^{p,q}$ laisse la norme $||\cdot||$ invariante (voir 2.3.2 pour les notations). Nous ferons donc dorénavant ces hypothèses sur $\{\tau^t\}$ et $\{\kappa^t\}$, ce qui revient, rappelons-le, à remplacer le point b_0 par un $b_0.p$ adéquat dans la même fibre. On notera $\epsilon = 1$ si $v = e'_n$ et $\epsilon = -1$ si $v = e'_1$. Si U est un ouvert convexe contenant o, alors U^ϵ désigne U^+ si $\epsilon = 1$, et U^- si $\epsilon = -1$.

Pour tout $R > 0$, nous posons :

$$V_R^> := B^\epsilon(o,R) \cap \{z = j^o(x) \in \mathbf{R}_o^{p,q} \mid \epsilon b(v,x) \geq 0\},$$

$$V_R^< := B^\epsilon(o,R) \cap \{z = j^o(x) \in \mathbf{R}_o^{p,q} \mid \epsilon b(v,x) \leq 0\}.$$

Notons que $B^\epsilon(o,R) = V_R^> \cup V_R^<$.

Si $z = \pi_G(e^\xi) \in B(o,R)$ pour $\xi \in \mathcal{B}(0,R)$, nous appelons $[oz]$ le segment géodésique défini par :

$$[oz] := \{\pi_G(e^{u\xi}) \mid u \in [0,1]\}.$$

Proposition 4.2. — *Soit $R > 0$. Alors :*

1. *Pour tout $z \in V_R^>$ et tout $t \geq 0$, ou pour tout $z \in V_R^<$ et tout $t \leq 0$, on a $h^t.[oz] \subset B(o,R)$. De plus, dans le premier cas, $\lim_{t\to\infty} h^t.[oz] = o$, et $\lim_{t\to-\infty} h^t.[oz] = o$ dans le second cas.*
2. *Soit $z \in V_R^> \cup V_R^<$ et soit (t_k) une suite de nombres positifs si $z \in V_R^>$, et négatifs si $z \in V_R^<$. Supposons que $|t_k| \to \infty$. Alors la suite (h^{t_k}) est fortement stable en z et quitte à remplacer (t_k) par une suite extraite, l'holonomie de (h^{t_k}) en z est $(h_k) = (diag(t_k^2,\dots,t_k^2))$.*

Démonstration. — Rappelons que la classe d'holonomie en un point est "invariante par perturbation compacte." En particulier $(h^{t_k}) = (\kappa^{t_k}.\tau^{t_k})$ est fortement stable en z si et seulement si (τ^{t_k}) l'est, et la classe d'équivalence d'holonomies de (h^{t_k}) en z est la même que celle de (τ^{t_k}). Par ailleurs, le flot $\{\kappa^t\}$ laisse invariante toute boule $B(o,R)$, et $\kappa^t.[oz] = [oz_t]$ avec $z_t = \kappa^t.z$. Il est donc suffisant de montrer la proposition pour $h^t = \tau^t$.

Prenons $z := j^o(x) \in B^\epsilon(o,R)$. On a alors $||x|| < R$ et $\epsilon q(x) > 0$. Par ailleurs le segment $[oz]$ est simplement :

$$[oz] = \{j^o(ux) \mid u \in [0,1]\}.$$

Dans la suite des calculs, nous utilisons le fait que comme $v = e'_1$ ou e'_n, on a $||v|| = 1$ et $b(y,v) = \epsilon < y, v >$ pour tout $y \in \mathbf{R}^{p,q}$.

Le groupe à un paramètre de $\mathrm{O}(p+1,q+1)$ correspondant à $\{\tau^t\}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & tv^* & -\epsilon t^2/2 \\ & I_{p+q} & -tv \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

où $v^* = v^t.J_{p,q}$ dans la base $e_1, \dots, e_n$. En cordonnées projectives on peut écrire

$$j^o(ux) = [1 : ux_1 : \cdots : ux_n : -\frac{u^2 q(x)}{2}].$$

L'image $\tau^t.j^o(ux)$ est alors :

$$[1 + tu\langle x, v\rangle + \frac{\epsilon t^2 u^2 q(x)}{4} : ux_1 + \frac{tu^2 q(x)}{2} v_1 : \cdots : ux_n + \frac{tu^2 q(x)}{2} v_n : -\frac{u^2 q(x)}{2}].$$

Dans la carte j^o ce point est :

$$x(u,t) = \frac{1}{1 + tu\langle x, v\rangle + \frac{\epsilon t^2 u^2 q(x)}{4}} \cdot \left(ux + \frac{tu^2 q(x)}{2} v \right). \tag{7}$$

On suppose à présent que $z \in V_R^>$ avec $t \geq 0$ ou $V_R^<$ avec $t \leq 0$. Cela implique $\epsilon tb(x,v) \geq 0$. Nous voulons montrer que sous ces conditions $\tau^t.[oz] \subset B(o,R)$, et il suffit pour cela de prouver $||x(u,t)||^2 - ||ux||^2 \leq 0$. On calcule donc :

$$||x(u,t)||^2 = \frac{u^2 ||x||^2 + tu^3 q(x) b(x,v) + \frac{t^2 u^4 q^2(x)}{4}}{(1 + tu\langle x, v\rangle + \frac{\epsilon t^2 u^2 q(x)}{4})^2} \tag{8}$$

$$= \frac{u^2(||x||^2 + q(x) c(u,t))}{(1 + \epsilon c(u,t))^2} \tag{9}$$

avec $c(u,t) = utb(x,v) + \frac{t^2 u^2 q(x)}{4}$. Observons que les conditions $\epsilon q(x) > 0$ et $\epsilon tb(x,v) \geq 0$ entraînent que $\epsilon c(u,t) \geq 0$.

On vérifie à présent que :

$$||x(u,t)||^2 - ||ux||^2 = \frac{\epsilon c(u,t)(u^2 \epsilon q(x) - 2u^2 ||x||^2) - u^2 c^2(u,t) ||x||^2}{(1 + \epsilon c(u,t))^2}.$$

On obtient bien que cette quantité est négative puisque $\epsilon c(u,t) \geq 0$, et que par ailleurs $2||x||^2 \geq |q(x)| = \epsilon q(x)$.

On veut maintenant montrer que $\lim_{|t| \to \infty} h^t.[oz] = o$ sous les hypothèses du point (1). Là encore, il suffit de considérer le cas $h^t = \tau^t$. On a donc toujours la condition $\epsilon tb(x,v) \geq 0$. Fixons nous $\delta > 0$. On cherche $T_\delta > 0$ tel que $|t| \geq T_\delta$ implique :

$$\sup_{u \in [0,1]} ||x(u,t)|| \leq 2\delta.$$

Remarquons que puisque $||x(u,t)||^2 - ||ux||^2 \leq 0$, alors

$$\sup_{u \in [0, \frac{\delta}{R}]} ||x(u,t)|| \leq \delta,$$

et ce pour tout $t \geq 0$ si $z \in V_R^>$ et pour tout $t \leq 0$ si $z \in V_R^<$. Maintenant, si $u \in [\frac{\delta}{R}, 1]$, on tire de (8) que :

$$||x(u,t)||^2 \leq 16 \frac{||x||^2 + |tq(x)| \cdot ||x|| + \frac{t^2 q^2(x)}{4}}{u^4 t^4 q^2(x)} \leq 16 R^4 \frac{(||x|| + \frac{|tq(x)|}{2})^2}{t^4 \delta^4 q^2(x)}.$$

Le majorant est indépendant de u et tend vers 0 lorsque $|t| \to \infty$. Ainsi, il existe $T_\delta > 0$ tel que pour $t \geq T_\delta$:

$$\sup_{u \in [\frac{\delta}{R}, 1]} ||x(u,t)|| \leq \delta,$$

ce qui achève la preuve du premier point de la proposition.

Nous montrons à présent le second point pour $z \in V_R^>$ et $t_k \to \infty$, le cas $z \in V_R^<$ et $t_k \to -\infty$ étant similaire. On va prendre une suite (z_k) qui tend vers un point proche de z, puis on va calculer, dans la carte à l'infini, la vitesse à laquelle $\tau^{t_k}.z$ et $\tau^{t_k}.z_k$ se rapprochent. Le Théorème 3.3 nous permettra alors de déterminer l'holonomie en z.

On écrit $z = j^o(x)$. Soit $x_k = x + w_k$, avec $w_k \to w_\infty$, et $z_k = j^o(x_k)$. Dans les calculs qui suivent, nous notons $\tau^{t_k}.z = j^o(y_k)$ et $\tau^{t_k}.z_k = j^o(y'_k)$. Nous notons également

$$a = \frac{\epsilon q(x)}{4} \qquad a_k = \frac{\epsilon q(x_k)}{4}$$
$$b = < x, v > \qquad b_k = < x_k, v > .$$

De l'expression (7) pour $u = 1$, on tire :

$$y'_k = \frac{1}{1 + t_k b_k + a_k t_k^2} \cdot (x_k + 2 a_k \epsilon t_k v). \tag{10}$$

Si w_∞ est dans un petit voisinage de 0, alors du fait que $q(x) \neq 0$, la suite (a_k) va admettre une limite non nulle et donc $y'_k \to 0$. On obtient $\lim_{k\to\infty} \tau^{t_k}.z_k = o$, ce qui prouve que (τ^{t_k}) est fortement stable en z.

On suppose désormais que $w_\infty \neq 0$ est dans un petit voisinage de 0. Pour des suites (a_k) et (b_k), on entend par $b_k = o(a_k)$ que $\lim_{k\to\infty} b_k/a_k = 0$. De l'expression (10), on tire :

$$y_k = \frac{2\epsilon}{t_k} v + \frac{1}{t_k^2} \left(\frac{x}{a} - \frac{2\epsilon b}{a} v \right) + o\left(\frac{1}{t_k^2}\right)$$

et

$$y'_k = \frac{2\epsilon}{t_k} v + \frac{1}{t_k^2} \left(\frac{x_k}{a_k} - \frac{2\epsilon b_k}{a_k} v \right) + o\left(\frac{1}{t_k^2}\right).$$

On en conclut que quelle que soit la limite $w_\infty \neq 0$, $||y_k - y'_k|| \sim \frac{C}{t_k^2}$, où la constante C vaut :

$$C = ||\frac{x}{a} - \frac{x_\infty}{a_\infty} + \left(\frac{2\epsilon b_\infty}{a_\infty} - \frac{2\epsilon b}{a} \right) \cdot v||.$$

Cette constante ne peut pas être nulle. S'il en était ainsi, alors on aurait

$$\frac{x}{a} - \frac{x_\infty}{a_\infty} = \left(\frac{2\epsilon b}{a} - \frac{2\epsilon b_\infty}{a_\infty} \right) \cdot v. \tag{11}$$

Si on applique $\langle \cdot, v\rangle$ aux deux côtés, on obtient

$$\frac{b}{a} - \frac{b_\infty}{a_\infty} = \frac{2b}{a} - \frac{2b_\infty}{a_\infty},$$

ce qui donne une contradiction sauf si $b/a = b_\infty/a_\infty$. Dans ce cas, les deux côtés de (11) sont nuls. Alors $w_\infty = c \cdot x$ pour un $c \in \mathbf{R}$, et

$$\frac{4x}{\epsilon q(x)} = \frac{4(1+c)x}{\epsilon(1+c)^2 q(x)}$$

Cela contredit $w_\infty \neq 0$.

Quitte à considérer une sous-suite de (t_k), nous pouvons appliquer le Théorème 3.3 à la suite (h^{t_k}). L'estimation $||y_k - y'_k|| \sim \frac{C}{t_k^2}$ quel que soit $w_\infty \neq 0$, jointe aux points $2, (a), (b)$ du Théorème 3.3, donnent que la stratification dynamique est triviale : l'entier s vaut 1 et $\mu_1(k) = t_k^{-2}$. La suite $(\mathrm{diag}(t_k^2, \ldots, t_k^2))$ de A^+ est une suite d'holonomie pour (τ^{t_k}) en z. □

Nous pouvons à présent transcrire sur le flot local $\{\phi_X^t\}$ les informations récoltées sur $\{h^t\}$. Soit $R_0 > 0$ comme dans la Proposition 3.2. Soit $R \leq R_0$ tel que l'application $\xi \mapsto \exp(b_0, \xi)$ soit définie et injective sur $\mathcal{B}(0, R) \subset \mathfrak{n}^-$. Soient $\mathcal{V}_R^>$ et $\mathcal{V}_R^< \subset B^\epsilon(0, R)$ les images réciproques $(j^o)^{-1}(V_R^>)$ et $(j^o)^{-1}(V_R^<)$, respectivement. Pour $\xi \in \mathcal{V}_R^>$, si $\alpha(u) = \exp(b_0, u\xi)$, alors la Proposition 4.2 nous dit que $\{h^t\}$ satisfait aux hypothèses de la Proposition 3.2 avec $\beta = \mathcal{D}_{x_0}^{b_0}(\alpha)$; il en va de même pour $\xi \in \mathcal{V}_R^<$ et $\{h^{-t}\}$. Posons $U^> := \pi(\exp(b_0, \mathcal{V}_R^>))$ et $U^< := \pi(\exp(b_0, \mathcal{V}_R^<))$. La Proposition 3.2 implique alors que ϕ_X^t est défini pour tout temps positif sur $U^>$ et pour tout temps négatif sur $U^<$; de plus $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.x = x_0$ pour tout $x \in U^>$ et $\lim_{t\to-\infty} \phi_X^t.x = x_0$ pour tout $x \in U^<$, comme annoncé dans les points (1) et (2) du Théorème 4.1. Par ailleurs, par le point (2) de la Proposition 4.2, et le point (1) de la Proposition 3.6, il existe un ouvert non vide contenant $\alpha(1)$ qui est conformément plat. Comme on a choisi ξ quelconque dans $\mathcal{V}_R^> \cup \mathcal{V}_R^<$, on obtient que $U^> \cup U^<$ est conformément plat. Comme $U^> \cup U^< = U^\epsilon$, avec $U = \exp(b_0, \mathcal{B}(0, R))$ convexe, on obtient le point (3) du Théorème 4.1.

4.2. Cas où $\{\tau^t\}$ est un flot de translations de type lumière. — Nous allons, dans cette section, préciser le Théorème 1.4, en prouvant :

Théorème 4.3. — *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), $p \geq 1$, $p + q \geq 3$. Soit $X \in \chi^{co}(M)$, s'annulant en $x_0 \in M$. On suppose que le flot d'holonomie $\{h^t\}$ de X en x_0 est le produit commutatif $\{\kappa^t \cdot \tau^t\}$, avec $\{\kappa^t\}$ relativement compact et $\{\tau^t\}$ un groupe de translations de type lumière. Alors il existe :*

- *un segment géodésique de lumière Δ passant par x_0, et sur lequel X s'annule ;*
- *deux ouverts $U^>$ et $U^<$, avec $\Delta \subset \overline{U^>} \cap \overline{U^<}$; et*
- *deux submersions $\pi^> : U^> \to \Delta$ et $\pi^< : U^< \to \Delta$, dont les fibres sont des hypersurfaces dégénérées,*

avec le propriétés suivantes :

1. *Pour tout $x \in U^>$, le flot ϕ_X^t est défini pour tout $t \geq 0$, et de plus $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.x = \pi^>(x)$.*
2. *Pour tout $x \in U^<$, le flot ϕ_X^t est défini pour tout $t \leq 0$, et de plus $\lim_{t\to-\infty} \phi_X^t.x = \pi^<(x)$.*
3. *L'ouvert $(U,[g])$, où $U = U^> \cup U^<$, est conformément plat.*

L'étude de ce cas est proche de celle qui a été menée dans [FM], et ce qui suit est une adaptation au cadre des champs de vecteurs des techniques introduites dans [FM, Secs 4.1 - 5.1].

Quitte à conjuguer $\{h^t\}$ dans P, ce qui revient à remplacer b_0 par un point $b_0.p$, pour $p \in P$ adéquat, on peut supposer que τ^t est la translation de vecteur tv avec $v = e_1$ et que κ^t est inclus dans $\mathrm{CO}(p,q)$, et préserve la norme $||\cdot||$ pour tout t. Nous reprenons les notations des Sections 2.3.2 et 2.3.4. On vérifie que $\Sigma := \mathcal{N}(\mathfrak{n}^-)\cap\mathcal{S}(0,1)$ est une variété lisse difféomorphe à $\mathbf{S}^{p-1}\times\mathbf{S}^{q-1}$ (si $p=1$, alors Σ n'est pas connexe). Il existe dans $\mathfrak{n}^-$ un vecteur ξ_1 caractérisé par le fait que $\mathrm{Fix}(\mathrm{Ad}\ \tau^t)\cap\mathfrak{n}^- = \mathbf{R}.\xi_1$ ([FM, Lem 4.6]). La géodésique $\Lambda(v) := \pi_G(e^{v\xi_1})$ est de type lumière, et l'on dit que c'est la géodésique singulière associée à $\{\tau^t\}$. On note $\hat{\Lambda}(v) := e^{v\xi_1}$. Remarquons que puisque $\{\kappa^t\}$ commute à $\{\tau^t\}$ et $\{\mathrm{Ad}\ \kappa^t\}$ préserve $\mathfrak{n}^-$, on doit avoir $(\mathrm{Ad}\ \kappa^t).\xi_1 = \xi_1$ pour tout t. On conclut que h^t fixe Λ point par point pour tout t. Pour $\delta > 0$, on définit :

$$\Lambda_\delta := \{\Lambda(v) \mid v \in (-\delta,\delta)\}.$$

L'hyperplan $\xi_1^\perp$, où l'orthogonal est pris relativement à $\lambda^{p,q}$, sépare le cône $\mathcal{N}(\mathfrak{n}^-)$ en deux composantes connexes $\mathcal{S}$ et $-\mathcal{S}$, et l'on va noter $\mathcal{S}_\Sigma = \Sigma \cap \mathcal{S}$. Pour tout $r > 0$, définissons :

$$C^>(r) := \{\pi_G(e^{u\xi}) \in \mathrm{Ein}^{p,q} \mid u \in (0,r),\ \xi \in \mathcal{S}_\Sigma\},$$

et

$$C^<(r) := \{\pi_G(e^{u\xi}) \in \mathrm{Ein}^{p,q} \mid u \in (0,r),\ \xi \in -\mathcal{S}_\Sigma\}.$$

Nous appellerons par la suite $C(r)$ la réunion $C^>(r)\cup C^<(r)\cup\{o\}$, et pour $z \in C^>(r)\cup C^<(r)$, on notera $[oz]$ le segment géodésique de lumière joignant o et z.

Proposition 4.4. — *Pour $r > 0$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $z \in C^>(r)$ et tout $t \geq 0$, ou pour tout $z \in C^<(r)$ et $t \leq 0$, on a l'inclusion $h^t.[oz] \subset C(r)$ et $\lim_{|t|\to\infty} h^t.[oz] = o$.*

2. *Soit* $z \in C(r)^{>} \cup C(r)^{<}$ *et soit* (t_k) *une suite de nombres positifs si* $z \in C(r)^{>}$*, et négatifs si* $z \in C(r)^{<}$*. Supposons que* $|t_k| \to \infty$*. Alors la suite* (h^{t_k}) *est stable en* z*. Quitte à remplacer* (t_k) *par une suite extraite, l'holonomie de* (h^{t_k}) *en* z *est* $h_k = diag(t_k^2, |t_k|, \ldots, |t_k|, 1)$.

Démonstration. — Pour les mêmes raisons que celles qui ont été expliquées au début de la preuve de la Proposition 4.2, il suffit de faire la preuve lorsque $\{h^t\} = \{\tau^t\}$. Le groupe à un paramètre de $\mathrm{O}(p+1, q+1)$ correspondant à $\{\tau^t\}$ s'écrit comme

$$\begin{pmatrix} 1 & tw^* & 0 \\ & I_{p+q} & -tw \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

où $w = e_1$ et w^* est le transposé de e_n. On choisit $z \in C^{>}(r) \cup C^{<}(r)$. Alors $z = j^o(x)$ pour un certain $x = (s_1, \ldots, s_n)$ satisfaisant $q(x) = 0$ et $s_n \neq 0$. On a $s_n > 0$ si $z \in C^{>}(r)$ et $s_n < 0$ si $z \in C^{<}(r)$. Le segment $[oz]$ est $\{\beta(u) := j^o(ux) \mid u \in [0,1]\}$. Pour tout t, on calcule que $\tau^t.\beta(u) = j^o(x(u,t))$ avec :

$$x(u,t) = \frac{ux}{1 + tus_n} \tag{12}$$

On en déduit donc que $\tau^t.\beta(u) = \beta(\frac{u}{1+tus_n})$. Ainsi $\tau^t.\beta(u) \in C^{>}(r)$ pour tout $t \geq 0$ si $z \in C^{>}(r)$, et $\tau^t.\beta(u) \in C^{<}(r)$ pour tout $t \leq 0$ si $z \in C^{<}(r)$. De plus, $\lim_{|t|\to\infty}[\beta] = \beta(0) = o$ sous ces hypothèses.

On va maintenant montrer le second point de la proposition. On suppose $z \in C^{>}(r)$ et $t_k \to \infty$ (le cas $z \in C^{<}(r)$ et $t_k \to -\infty$ se traite de manière identique). Soit $x_k := (s_1(k), \ldots, s_n(k))$ une suite qui tend vers $x' := (s_1', \ldots, s_n')$ assez proche de x pour que $s_n s_n' > 0$. Soit $z_k = j^o(x_k)$. Dans les calculs qui suivent, nous notons $\tau^{t_k}.z = j^o(y_k)$, $\tau^{t_k}.z_k = j^o(y_k')$ et $\sigma_k = \frac{q(x_k)}{2}$. On calcule :

$$y_k' = \left(\frac{s_1(k) + t_k\sigma_k}{1 + t_k s_n(k)}, \frac{s_2(k)}{1 + t_k s_n(k)}, \ldots, \frac{s_n(k)}{1 + t_k s_n(k)}\right). \tag{13}$$

Si $x_k \to x$, alors $\sigma_k \to 0$. On a donc $y_k' \to 0$ et $\tau^{t_k}.z_k \to o$: la suite (τ^{t_k}) est stable en z.

On va déterminer son holonomie en z, quitte à considérer une suite extraite de (t_k). Pour cela, on va appliquer les conclusions du Théorème 3.3 à la suite $(f_k) := (\tau^{t_k})$, qui est stable en z. Il existe un entier $s \geq 1$, un voisinage ouvert U_z de z dans $\mathrm{Ein}^{p,q}$, des suites $\mu_1(k) < \cdots < \mu_s(k)$ et des sous-variétés $F_0^{loc}(z) \subsetneq F_1^{loc}(z) \subsetneq \cdots \subsetneq F_{s-1}^{loc}(z) \subsetneq U_z$ qui satisfont aux conclusions $2(a)$ et (b) du théorème. En gardant les mêmes notations que ci-dessus, on va supposer que $z' := j^o(x') \in U_z$, et que la distance d intervenant dans les points $2(a)$ et (b) est la poussée par l'application j^o de la distance induite par la norme $\|\cdot\|$. Posons :

$$E_2 = j^o(\mathcal{N}^{p,q}) \cap U_z$$

et

$$E_1 = j^o(\mathbf{R}x) \cap U_z.$$

On reprend les formules (12) et (13) et l'on obtient :

$$y_k = \frac{x}{1+t_k s_n} = \frac{x}{t_k s_n} - \frac{x}{t_k^2 s_n^2} + o\left(\frac{1}{t_k^2}\right)$$

et

$$y_k' = \frac{t_k \sigma_k}{1+t_k s_n(k)} \cdot e_1 + \frac{x_k}{t_k s_n(k)} - \frac{x_k}{t_k^2 s_n(k)^2} + o\left(\frac{1}{t_k^2}\right).$$

Ces expressions vont nous permettre de comprendre à quelle vitesse y_k et y_k' se rapprochent. Dans la suite, on pose $\sigma_\infty = \lim_{k\to\infty} \sigma_k$.

- On suppose que $x' \notin \mathcal{N}^{p,q}$. Alors $\sigma_\infty \neq 0$. La suite $(||y_k - y_k'||)$ tend vers $\frac{\sigma_\infty}{s_n'}$. Autrement dit, pour tout $z' \in U_z \setminus E_2$, et toute suite (z_k) qui converge vers z', il existe $C > 0$ tel que $d(\tau^{t_k}.z, \tau^{t_k}.z_k) \sim C$.
- Supposons maintenant que $x' \in \mathcal{N}^{p,q} \setminus \mathbf{R}x$. On a $\sigma_\infty = 0$, et $x' \notin \mathbf{R}x$. La composante de la différence $y_k - y_k'$ selon le vecteur e_j, pour $j = 2, \dots, n$ est :

$$\left(\frac{s_j}{s_n} - \frac{s_j(k)}{s_n(k)}\right)\frac{1}{t_k} + \left(\frac{s_j(k)}{s_n(k)^2} - \frac{s_j}{s_n^2}\right)\frac{1}{t_k^2} + o\left(\frac{1}{t_k^2}\right). \tag{14}$$

  Notons que le coefficient de $\frac{1}{t_k}$ est trivial pour $j = n$. Si l'égalité $s_j = \frac{s_n}{s_n'} s_j'$ a lieu pour tout $j = 2, \dots, n$ alors de $q(x) = q(x')$, on tire $s_1 = \frac{s_n}{s_n'} s_1'$—une contradiction avec $x' \notin \mathbf{R}x$. On conclut que si $z' \in E_2 \setminus E_1$, alors pour toute suite (z_k) de U_z qui tend vers z', $\frac{1}{t_k} = O(d(\tau^{t_k}.z, \tau^{t_k}.z_k))$.

  Soit (x_k) une suite qui tend vers x'. Alors la suite (σ_k) tend vers 0. Aussi, quitte à remplacer (x_k) par une suite extraite, tout en gardant *la même* suite (t_k), on peut supposer que $\sigma_k = o(\frac{1}{t_k})$. Dans ce cas, la composante de $y_k - y_k'$ selon le vecteur e_j, pour $j = 1, \dots, n$, est de la forme :

$$\frac{1}{t_k}\left(\frac{s_j}{s_n} - \frac{s_j(k)}{s_n(k)}\right) + o\left(\frac{1}{t_k}\right).$$

  Là encore, l'hypothèse $x' \notin \mathbf{R}x$ assure que l'une des limites $\frac{s_j}{s_n} - \frac{s_j'}{s_n'}$ n'est pas nulle. On en conclut que $\|y_k - y_k'\| = \Theta(\frac{1}{t_k})$. Donc, si $z' \in E_2 \setminus E_1$, il existe (z_k) qui converge vers z' telle que :

$$d(\tau^{t_k}.z, \tau^{t_k}.z_k) = \Theta\left(\frac{1}{t_k}\right).$$

- Soit enfin $x' \in \mathbf{R}x \setminus \{x\}$. Autrement dit $x' = \lambda x$, avec $\lambda \neq 1$. Quitte à réduire l'ouvert U_z, on va supposer que $\lambda \in]0, 2[$. De l'expression (14), on déduit que la composante selon e_n de la différence $y_k - y_k'$ est de la forme

$(\frac{1}{\lambda}-1)\frac{1}{s_n}\frac{1}{t_k^2}+o(\frac{1}{t_k^2})$. On conclut que si $z' \in E_1 \setminus \{z\}$ est proche de z, et si (z_k) est une suite qui tend vers z', alors :

$$\frac{1}{t_k^2} = O(d(\tau^{t_k}.z, \tau^{t_k}.z_k)).$$

Finalement, considérons une suite quelconque $x_k \to x'$. La suite (σ_k) tend vers 0, donc quitte à remplacer (x_k) par une sous-suite, sans modifier la suite (t_k), on peut supposer que σ_k est négligeable devant $\frac{1}{t_k^2}$. Dans ce cas, la formule (14) est aussi valide pour $j=1$. Comme $\frac{s_j}{s_n}-\frac{s_j(k)}{s_n(k)}$ tend vers 0 pour $j=1,\dots,n-1$, on peut à nouveau remplacer (x_k) par une suite extraite, sans modifier (t_k), de sorte que cette suite de différences soit un $O(\frac{1}{t_k^2})$. Ainsi, pour $j=1,\dots,n-1$, toutes les composantes de y_k-y_k' selon e_j sont en $O(\frac{1}{t_k^2})$. Par le paragraphe précédent, la composante de y_k-y_k' selon e_n est équivalente à $(\frac{1}{\lambda}-1)\frac{1}{s_n}\frac{1}{t_k^2}$. On en conclut qu'il existe $z_k \to z'$ telle que :

$$d(\tau^{t_k}.z, \tau^{t_k}.z_k) = \Theta\left(\frac{1}{t_k^2}\right).$$

En conclusion, le Théorème 3.3, et l'unicité mentionnée en Remarque 3.5, montrent que l'entier s vaut 3, que $\mu_1(k)=\frac{1}{t_k^2}$, $\mu_2(k)=\frac{1}{t_k}$, et $\mu_3(k)=1$. Enfin, $F_1^{loc}(z)=E_1$ et $F_2^{loc}(z)=E_2$.

Par la manière dont les suites $(\mu_j(k))$ sont définies à partir de l'holonomie, on conclut que $(h_k)=(\mathrm{diag}(t_k^2,t_k,\dots,t_k,1))$ est une suite d'holonomie de (τ^{t_k}) en $z=j(x)$, comme annoncé. □

Sur la variété M, on pose $\hat{\Delta}(v) := \exp(b_0, v\xi_1)$, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, et $\Delta(v)=\pi(\hat{\Delta}(v))$. Pour tout $\delta>0$ tel que $(-\delta,\delta)\subset I$, on pose $\Delta_\delta := \{\Delta(v) \mid v \in (-\delta,\delta)\}$. Du fait que $(\mathrm{Ad}\, h^t).\xi_1=\xi_1$ pour tout t, on obtient par exactement la même preuve que [FM, Prop 5.5] :

Lemme 4.5. — *Pour tout $v\in(-\delta,\delta)$, le flot d'holonomie de X en $\Delta(v)$ relativement à $\hat{\Delta}(v)$ est $\{h^t\}$.*

On définit pour tout $\delta>0$ tel que $(-\delta,\delta)\subset I$, et tout $r>0$ assez petit une application

$$\begin{aligned}\psi_1 : (-\delta,\delta)\times(0,r)\times(\mathcal{S}_\Sigma \cup -\mathcal{S}_\Sigma) &\to M\\ (v,u,\xi) &\mapsto \pi(\exp(\hat{\Delta}(v),u\xi)).\end{aligned}$$

L'image de ψ_1 est notée $\dot{U}(\delta,r)$. On définit les sous-ensembles :

$$\dot{U}^{>}(\delta,r) := \psi_1((-\delta,\delta)\times(0,r)\times\mathcal{S}_\Sigma),$$

et

$$\dot{U}(\delta,r)^{<} := \psi_1((-\delta,\delta)\times(0,r)\times-\mathcal{S}_\Sigma).$$

Chacun de ces ensembles contient Δ_δ dans son adhérence. On note $U(\delta, r) = \dot{U}(\delta, r) \cup \Delta_\delta$, et les analogues pour $U^>(\delta, r)$ et $U^<(\delta, r)$.

On va maintenant trouver δ_0 et $r_0 > 0$ tels que $\phi_X^t.x$ est défini pour tout $t \geq 0$ si $x \in U^>(\delta_0, r_0)$, et pour tout $t \leq 0$ si $x \in U^<(\delta_0, r_0)$.

On choisit $\delta_0 > 0$ et $r_0 > 0$ suffisamment petits pour que

- $\xi \mapsto \pi(\exp(\hat{\Delta}(v), \xi))$ soit une injection sur $\mathcal{B}(0, r_0)$ pour tout $v \in (-\delta_0, \delta_0)$
- $C(r_0) \subset B(o, R)$, où $R > 0$ est donné par la Proposition 3.2

On écrit $x = \pi(\exp(\hat{\Delta}(v), u\xi))$, avec $\xi \in \mathcal{S}_\Sigma$. On définit également :

$$\alpha(s) := \pi(\exp(\hat{\Delta}(v), su\xi))) \text{ et } \beta := \mathcal{D}_{\Delta(v)}^{\hat{\Delta}(v)}(\alpha).$$

Il s'agit d'un segment géodésique de lumière de $C^>(r_0) \subset B(o, R)$. Le flot d'holonomie de $\{\phi_X^t\}$ en $\Delta(v)$ relativement à $\hat{\Delta}(v)$ est $\{h^t\}$ par le Lemme 4.5. On peut alors appliquer les Propositions 4.4 et 3.2. On conclut que $\phi_X^t.\alpha(1)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et que $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.x = \alpha(0) = \Delta(v)$. Le cas $\xi \in -\mathcal{S}_\Sigma$ se traite de manière identique.

Soit de plus δ_0 assez petit pour que Δ soit injective sur $(-\delta_0, \delta_0)$. Dans ce cas, on va montrer que ψ_1 est injective sur $(-\delta_0, \delta_0) \times (0, r_0) \times (\mathcal{S}_\Sigma \cup -\mathcal{S}_\Sigma)$. Soit $x \in \dot{U}^>(\delta_0, r_0)$ avec $x = \psi_1(v, u, \xi) = \psi_1(v', u', \xi')$. Comme $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.x = \Delta(v) = \Delta(v')$, alors nécessairement $v = v'$. Puis comme $\zeta \mapsto \pi(\exp(\hat{\Delta}(v), \zeta))$ est injective sur $\mathcal{B}(0, r_0)$, on obtient $u = u'$ et $\xi = \xi'$. Par le Théorème d'Invariance du Domaine, les ensembles $\dot{U}^>(\delta_0, r_0)$ et $\dot{U}^<(\delta_0, r_0)$ sont ouverts.

Alors soit $U^> = \dot{U}^>(\delta_0, r_0)$ et $U^< = \dot{U}^<(\delta_0, r_0)$ pour δ_0 et r_0 comme ci-dessus. On définit $\pi^>$ sur $U^>$ par

$$\pi^> : \psi(v, u, \xi) \mapsto \Delta(v)$$

et similairement pour $\pi^<$ sur $U^<$. Ces ensembles et projections satisfont à (1) et à (2) du Théorème 4.3, en prenant Δ_δ pour le segment lumière. Pour (3), il suffit de prouver la proposition suivante.

Proposition 4.6. — *La métrique est conformément plate sur $U^>$ et $U^<$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que la géométrie est conformément plate sur $U^> = \dot{U}^>(\delta_0, r_0)$. Le cas de $U^<$ se traite de manière identique.

Soit donc $x \in \dot{U}^>(\delta_0, r_0)$, que l'on écrit $x = \psi_1(v, u, \xi)$. Soit α et β comme dans la preuve précédente. Le Lemme 4.5 assure que le flot d'holonomie de X en $\Delta(v)$ est $\{h^t\}$. Par les Propositions 3.2 et 4.4, il existe un voisinage $U' \subset \dot{U}^>(\delta_0, r_0)$ de x et une suite $s_k \to \infty$ telle que $(\phi_X^{s_k})$ soit stable en tout point $y \in U'$ avec pour holonomie $(h_k) := (\mathrm{diag}(s_k^2, s_k, \ldots, s_k, 1))$.

Quitte à remplacer (s_k) par une suite extraite, on peut appliquer le Théorème 3.3. Les suites intervenant dans le théorème sont ici $\mu_1(k) = 1/s_k^2$, $\mu_2(k) = 1/s_k$ et $\mu_3(k) = 1$. Il en résulte deux feuilletages F_1 et F_2. Le feuilletage F_1 consiste en des courbes de type lumière. Par la Remarque 3.4, $\mathcal{F}_2(x) = \mathcal{F}_1^{\perp}(x)$ pour tout $x \in U'$, si bien que F_2 consiste en des hypersurfaces de type lumière.

Désignons par $C_{\Delta(v)}$ le cône de lumière local issu de $\Delta(v)$. Les points $2(a)$, (b) du Théorème 3.3 nous disent que pour $z \in U'$, l'espace $\mathcal{F}_2(z)$ est tangent à la variété stable locale de z, qui est constituée des points y proches de z tels que $\lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}.z = \lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}.y$. Il ressort du point (1) déjà prouvé du Théorème 4.3 que $\mathcal{F}_2(z)$ est tangent à $C_{\Delta(v)} \cap U'$ en z. La Remarque 3.4 assure que $\mathcal{F}_2(z) = \mathcal{F}_1^{\perp}(z)$. Les points $1(a)$ et $1(b)$ du Théorème 3.3 assurent qu'en chaque $z \in U'$, il existe un repère $(u_1(z), \ldots, u_n(z))$ de T_zM, avec $u_1(z), \ldots, u_{n-1}(z) \in \mathcal{F}_2(z)$ et $u_1(z) \in \mathcal{F}_1(z)$, ainsi qu'une suite de repères $(u_{1,k}(z), \ldots, u_{n,k}(z))$, où $u_{i,k}(z) \to u_i(z)$, pour $i = 1, \ldots, n$, satisfaisant :

$$||D_z\phi_X^{s_k}(u_{1,k}(z))|| = \Theta\left(\frac{1}{s_k^2}\right). \tag{15}$$

$$||D_z\phi_X^{s_k}(u_{j,k}(z))|| = \Theta\left(\frac{1}{s_k}\right), \quad j = 2, \ldots, n-1. \tag{16}$$

$$||D_z\phi_X^{s_k}(u_{n,k}(z))|| = \Theta(1). \tag{17}$$

La preuve est maintenant une petite perturbation de celle de [FM, Prop 6.1]. Nous en réexpliquons brièvement l'idée lorsque dim $M \geq 4$ (le cas de la dimension 3 est similaire en remplaçant le tenseur de Weyl par le tenseur de Cotton). Soit W le tenseur de Weyl sur M. Pour U' suffisamment petit :

$$||W(u, v, w)|| \leq C||u|| \cdot ||v|| \cdot ||w||, \tag{18}$$

pour une certaine constante $C > 0$. Nous voulons montrer que $W_z = 0$ dès que $z \in U'$. Pour tout $z \in U'$, et tout triplet $(i, j, l) \in \{1, \ldots, n\}^3$, on écrit :

$$\begin{aligned} &D_z\phi_X^{s_k}(W(u_{i,k}(z), u_{j,k}(z), u_{l,k}(z))) = \\ &\qquad W_{\phi_X^{s_k}.z}(D_z\phi_X^{s_k}(u_{i,k}(z)), D_z\phi_X^{s_k}(u_{j,k}(z)), D_z\phi_X^{s_k}(u_{l,k}(z))). \end{aligned}$$

De (18), des estimations (15), (16), (17) et de la relation précédente, on tire que si $(i, j, l) \neq (n, n, n)$, alors $D_z\phi_X^{s_k}(W(u_{i,k}(z), u_{j,k}(z), u_{l,k}(z))) = o(1)$. Des points $1(a)$ et $1(b)$ du Théorème 3.3, on conclut que Im W est inclus dans $\mathcal{F}_2(z)$, autrement dit Im W est tangent à $C_{\Delta(v)} \cap U'$. En particulier, en $\Delta(v)$, Im W devra être tangent aux orthogonaux de toutes les génératrices du cône de lumière. Ceci force $W_{\Delta(v)} = 0$. En reprenant cette information en compte dans la relation d'invariance de W, on obtient :

$$D_z\phi_X^{s_k}(W(u_{i,k}(z), u_{j,k}(z), u_{l,k}(z))) = o\left(\frac{1}{s_k}\right)$$

si deux des indices i, j, k valent n, sans être tous les trois égaux à n, et

$$D_z\phi_X^{s_k}(W(u_{i,k}(z), u_{j,k}(z), u_{l,k}(z))) = o\left(\frac{1}{s_k^2}\right)$$

sinon. Le point 1(b) du Théorème 3.3 conduit alors à

$$W_z(u_i(z), u_j(z), u_l(z)) = 0,$$

sauf éventuellement si deux des indices valent n, auquel cas $W_z(u_i(z), u_j(z), u_l(z))$ est colinéaire à $u_1(z)$. Mais dans ce cas, les symétries du tenseur de Weyl donnent :

$$g_z(W(u_n(z), u_j(z), u_n(z)), u_n(z)) = g_z(W(u_n(z), u_n(z), u_n(z)), u_j(z)) = 0.$$

On obtient donc bien $W_z = 0$. □

4.3. Preuve du Théorème 1.3. — Sous les hypothèses du théorème, le flot d'holonomie $\{h^t\}$ de X en x_0 possède une partie linéaire qui est semi-simple sur $\mathbf{C}$. En particulier, quitte à conjuguer $\{h^t\}$ dans P par une translation, on peut supposer que $\{h^t\}$ est le produit commutatif $\{l^t \cdot \tau^t\}$ d'un flot linéaire $\{l^t\}$ semi-simple sur $\mathbf{C}$, et d'un flot de translations $\{\tau^t\}$. Commençons par rappeler un lemme de linéarisation, dont on peut par exemple trouver une preuve dans [Fr3, Prop 4.2] :

Lemme 4.7. — *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne analytique, et X un champ de vecteurs conforme analytique admettant une singularité en x_0. Si le flot d'holonomie $\{h^t\}$ de X en x_0 fixe un point de $\mathbf{R}^{p,q}$, alors X et son champ d'holonomie X_h sont analytiquement conjugués au voisinage de x_0 et o respectivement.*

Si le flot de translations $\{\tau^t\}$ est trivial, l'holonomie de X fixe un point de $\mathbf{R}^{p,q}$. Alors par ce lemme le champ X est analytiquement conjugué au champ de vecteurs linéaire défini par $\{l^t\}$. Cela conduit au premier cas du Théorème 1.3. On suppose par la suite que $\{\tau^t\}$ n'est pas trivial.

Soit b_0 un point de B où le flot d'holonomie de X est de la forme $\{l^t \cdot \tau^t\}$. L'hypothèse d'analyticité sur la variété M implique que l'algèbre de Lie des holonomies, en b_0, des champs conformes qui s'annulent en x_0 est algébrique. C'est une conséquence du Théorème de Frobenius pour les structures conformes [G, Sec 3.4] (voir aussi [Me, Thm 3.11]). L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique est stable par la décomposition de Jordan, c'est-à-dire qu'elle contient les composantes semi-simples et nilpotentes de ses éléments (voir par exemple [Mo], 4.4.2). On en déduit qu'il existe sur un voisinage U de x_0, un champ conforme Y dont le flot d'holonomie en x_0 est précisément $\{\tau^t\}$. On est alors dans le second cas du Théorème 1.4. Par conséquent, un ouvert non vide de (M, g) va être conformément plat, et par analyticité, (M, g) est conformément plate. Le théorème découle alors de la Remarque 3.1.

5. Le cadre lorentzien analytique : preuve du Théorème 1.2

On considère un champ de vecteurs conforme analytique, sur une variété lorentzienne analytique (M, g), et l'on suppose que le champ X admet une singularité x_0. La preuve du théorème va consister à analyser les holonomies possibles du champ X en x_0. Par le Lemme 4.7, si l'holonomie de X en x_0 admet une décomposition affine dont la partie translation est triviale, alors X est linéarisable au voisinage de x_0. Si la partie linéaire est compacte et la partie translation non triviale, alors la courbure conforme s'annule sur un ouvert non vide par le Théorème 1.4. Il reste beaucoup d'holonomies possibles entre ces deux situations. Toutefois, pour les métriques lorentziennes analytiques, on sera en mesure de traîter ces cas intermédiaires pour arriver au Théorème 1.2. L'hypothèse d'analyticité va être exploitée, comme en Section 4.3, pour dire que les parties semi-simples et unipotentes d'un flot d'holonomie, sont elles-mêmes les flots d'holonomies de champs conformes au voisinage de x_0. Cela va permettre de réduire fortement le nombre de cas à étudier, soit par l'application du Théorème 1.4, qui assurera que (M, g) est conformément plate, soit en utilisant le Lemme 4.7 pour conclure que X est linéarisable. Après ce travail préliminaire, il ne restera essentiellement que deux types d'holonomies à étudier. Une analyse fine de la dynamique de X au voisinage de x_0 dans ces deux cas permettra de prouver l'anulation de la courbure conforme. Ce sera l'objet des Sections 5.2 et 5.3.

5.1. Réduction de l'holonomie à deux cas. — Soit $\{h^t\}$ le flot d'holonomie de X en x_0, relativement à $b_0 \in B$ dans la fibre de x_0. On considère la décomposition de Jordan de $\{h^t\}$ dans le groupe algébrique P : $\{h^t\}$ s'écrit comme produit commutatif d'un flot $\{h_s^t\}$ semi-simple sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que l'action de $\{\mathrm{Ad}\ h_s^t\}$ sur $\mathfrak{p}$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$, et d'un flot unipotent $\{h_u^t\}$.

Si le flot $\{h_u^t\}$ est trivial, cela veut dire que $\{h^t\} = \{h_s^t\}$ est conjugué dans P à un flot de $\mathbf{R}_+^* \times \mathrm{O}(1, n-1)$. L'holonomie fixe un point de $\mathbf{R}^{1,n-1}$: le Lemme 4.7 assure que X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0.

Supposons maintenant que $\{h_u^t\}$ n'est pas trivial, mais qu'il fixe un point de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. On appelle E le sous-espace affine constitué des points fixes de $\{h_u^t\}$. Le flot $\{h_s^t\}$ agit sur E comme un flot semi-simple dans le groupe $\mathrm{Aff}(E)$; il va donc avoir un point fixe, et finalement $\{h^t\}$ va fixer un point de $\mathbf{R}^{1,n-1}$: on conclut à nouveau que X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0.

Il reste à étudier le cas où $\{h_u^t\}$ ne fixe aucun point de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Comme nous l'avons expliqué en 4.3, l'analycité de M permet de supposer que $\{h^t\} = \{h_u^t\}$, ce que nous ferons par la suite. On va raisonner au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ et écrire le champ d'holonomie X_h comme une somme $X_h = U + T$, où U est un élément nilpotent de $\mathfrak{o}(1, n-1)$, et $T \in \mathfrak{n}^+$ est non trivial (sans quoi h^t aurait un point fixe dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$). Si U est trivial, on conclut directement par le Théorème 1.4 que (M, g) est conformément plate.

Si U n'est pas trivial, alors, à conjugaison dans P près, on peut supposer que U est la transformation suivante de $\mathbf{R}^{1,n-1}$:

$$U : x \mapsto b(x, e_2)e_1 - b(x, e_n)e_2.$$

L'élément T correspond à une translation de vecteur v sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$.

Soient T_2 et T_n les éléments de $\mathfrak{n}^+$ correspondant aux translations de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ de vecteurs e_2 et e_n, respectivement. Elles commutent avec T. Leurs commutateurs avec U sont

$$[T_2, U] = -T_1 \qquad \text{et} \qquad [T_n, U] = T_2$$

Quitte à conjuguer X_h par une translation dans P de direction dans $\mathrm{Vect}(e_2, e_n)$, on peut alors supposer que v n'a pas de composante dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Écrivons $v = a\xi + be_n$ avec $\xi \in \mathrm{Vect}(e_3, \dots, e_{n-1})$ de norme 1. Quitte à conjuguer par une rotation de P commutant avec l'exponentielle de U, on peut aussi supposer que $\xi = e_3$.

Après ces diverses conjugaisons, l'élément X_h s'écrit, dans $\mathfrak{o}(2, n)$, comme :

$$X_h = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & a\xi^* & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & -1 & \\ & & & \ddots & & -a\xi \\ & & & & 0 & -b \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

En prenant l'exponentielle, on obtient :

$$h^t = \begin{pmatrix} 1 & tb & \frac{t^2b}{2} & ta\xi^* & -\frac{t^3b}{6} & -\frac{t^2a^2}{2} + \frac{b^2t^4}{24} \\ & 1 & t & & -\frac{t^2}{2} & \frac{t^3b}{6} \\ & & 1 & & -t & \frac{t^2b}{2} \\ & & & \ddots & & -ta\xi \\ & & & & 1 & -tb \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Comme $T \neq 0$, alors a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Nous allons étudier la dynamique de $\{h^t\}$ près de o sur $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$, et utiliser les résultats des sections précédentes pour montrer que la courbure de Weyl s'annule sur un ouvert non vide de (M, g). L'analycité donnera la platitude conforme globale de M. Deux comportements dynamiques qualitativement différents apparaissent, suivant que b est nul ou non. Nous détaillons à présent ces deux cas.

5.2. Annulation de la courbure conforme dans le cas $b \neq 0$. — Quitte à conjuguer $\{h^t\}$ dans P, nous supposerons ici que $b = 1$ et $\xi = e_3$. Nous appelons $\Omega := \{z \in \mathrm{Ein}^{1,n-1} \mid z = j^o(x),\ q(x) \neq 0\}$, et $U = B(o, R_0)$ le voisinage de o donné par la Proposition 3.2. Le point clé de cette section va être de montrer la :

Proposition 5.1. — *Le flot $\{h^t\}$ a les propriétés dynamiques suivantes :*

1. *Pour tout point $z \in \Omega$, on a $h^t.z \to o$ lorsque $t \to \pm\infty$, la convergence étant de plus uniforme sur les compacts de Ω. En particulier, pour toute suite de réels (t_k) telle que $|t_k| \to \infty$, et pour tout $z \in \Omega$, la suite (h^{t_k}) est fortement stable en z.*
2. *Il existe un segment géodésique conforme $[\alpha]$ issu de x_0, se développant sur un segment géodésique $[\beta]$, avec $[\beta] \setminus \{o\} \subset \Omega$, et tel que d'une part $h^t.[\beta] \subset U$ pour tout $t \geq 0$, et d'autre part $h^t.[\beta] \to o$ lorsque $t \to \infty$.*

Cette proposition impliquera, par la Proposition 3.2, qu'il existe un ouvert V de (M, g) sur lequel le flot ϕ_X^t est défini pour tout $t \geq 0$, ainsi qu'une suite $s_k \to \infty$ telle que $(\phi_X^{s_k})$ soit fortement stable sur V. La Proposition 3.6 entraînera la platitude conforme de (M, g), prouvant ainsi le Théorème 1.2 dans ce cas.

Démonstration. — Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, soit α_x le polynôme de degré 4

$$\alpha_x(t) = 1 + (x_1 + ax_3) \cdot t + \left(\frac{x_2}{2} + \frac{a^2 q(x)}{4}\right) \cdot t^2 - \frac{x_n}{6} \cdot t^3 - \frac{q(x)}{48} \cdot t^4$$

L'action du flot $\{h^t\}$ sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} h^t.j^o(x) = \Bigg[1 : \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_1 + x_2 t - \frac{x_n}{2} \cdot t^2 - \frac{q(x)}{12} \cdot t^3) : \\ \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_2 - x_n t - \frac{q(x)}{4} \cdot t^2) : \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_3 + \frac{aq(x)}{2} \cdot t) : \\ \frac{x_4}{\alpha_x(t)} : \cdots : \frac{x_{n-1}}{\alpha_x(t)} : \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_n + \frac{q(x)}{2} \cdot t) : -\frac{q(x)}{2\alpha_x(t)} \Bigg] \end{aligned}$$

Le premier point de la proposition découle aisément de cette expression.

Montrons à présent le second point. Soit $z \in \Omega$. D'après ce qui précède, il existe $T > 0$ tel que si $t \geq T$, alors $h^t.z \in U$. On définit $z_0 = h^T.z$, $y_0 \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ par $j^o(y_0) = z_0$, et $y_t \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ par $h^t.j^o(y_0) = j^o(y_t)$ pour tout $t \geq 0$. On a bien entendu $h^t.z_0 \in U$ pour tout $t \geq 0$. Nous commençons par établir une formule pour $h^t.(j^o(uy_0))$, $u \in \mathbf{R}$.

Lemme 5.2. — *Pour $u \in \mathbf{R}$,*

$$h^t.(j^o(uy_0)) = [e_0 + uy_t - u\frac{q(y_t)}{2}e_{n+1} + u(1-u)\frac{q(y_0)}{2}h^t.e_{n+1}]$$

Démonstration. — Rappelons la définition de j^o :

$$j^o(y_t) = [e_0 + y_t - \frac{q(y_t)}{2} e_{n+1}]$$

Comme h^t agit linéairement sur $\mathbf{R}^{2,n}$, on a aussi

$$h^t.j^o(y_0) = [e_0 + h^t.y_0 - \frac{q(y_0)}{2} h^t.e_{n+1}]$$

Donc

$$h^t.y_0 = y_t - \frac{q(y_t)}{2} e_{n+1} + \frac{q(y_0)}{2} h^t.e_{n+1}$$

Alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} h^t.(j^o(uy_0)) &= [h^t.(e_0 + uy_0 - u^2 \frac{q(y_0)}{2} e_{n+1})] \\ &= [e_0 + uh^t.y_0 - u^2 \frac{q(y_0)}{2} h^t.e_{n+1}] \\ &= [e_0 + uy_t - u\frac{q(y_t)}{2} e_{n+1} + u(1-u)\frac{q(y_0)}{2} h^t.e_{n+1}] \end{aligned}$$

□

Nous définissons la géodésique conforme $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Ein}^{1,n-1}$ par $\gamma(s) := j^o(-sy_0)$. Nous allons montrer que $h^t.[\gamma] \to o$ lorsque $t \to \infty$. Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite $\{u_k\}$ de $[-1,0)$, un voisinage W de o et $t_k \to \infty$ tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $h^{t_k}.(j^o(u_k y_0)) \notin W$. Notons que la suite (u_k) tend vers 0, car sinon, on aurait une contradiction avec le premier point de la proposition. Quitte à considérer une suite extraite, nous pouvons supposer que $(u_k t_k^4)$ admet une limite dans $[-\infty, 0]$. Si cette limite est dans $(-\infty, 0]$, alors on tire de (19) que $u_k h^{t_k}.e_{n+1}$ tends vers ce_0 pour $c \leq 0$ quand $k \to \infty$. Par ailleurs, $h^t.j^o(y_0) \to o$, et donc

$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty} q(y_t) = 0.$$

On déduit du Lemme 5.2 que $h^{t_k}.j^o(u_k y_0)$ tend vers $[(1 + c\frac{q(y_0)}{2})e_0] = o$ quand $k \to \infty$, en contradiction avec l'hypothèse $h^{t_k}.(j^o(u_k x)) \notin W$. Une remarque clé est que $q(y_0) < 0$, et donc, $(1 + c\frac{q(y_0)}{2})e_0 \neq 0$. En effet, $q(y_0) > 0$ impliquerait $\alpha_{y_0}(t) < 0$ pour t suffisamment grand car le coefficient de t^4 dans $\alpha_{y_0}(t)$ est $-q(y_0)/48$. Mais $\alpha_{y_0}(0) = 1$. Donc α_{y_0} s'annulerait pour un $t_0 \in [0, \infty)$, ce qui contredirait $h^{t_0}.z \in U$.

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où $u_k t_k^4 \to -\infty$. Comme les composantes de $h^{t_k}.(j^o(u_k y_0))$, sauf celle sur e_0, croissent au plus comme $u_k t_k^3$, elles sont négligeables devant la composante selon e_0 qui, elle, est de l'ordre de $u_k t_k^4$: la limite est encore o, d'où une nouvelle contradiction.

Du fait que $h^t.[\gamma] \to o$, on déduit l'existence de $T' > 0$ tel que $h^t.[\gamma] \subset U$ pour tout $t \geq T'$. Définissons $\beta(s) := h^{T'}.\gamma(s)$, $s \in [0,1]$. On peut écrire $\beta(s) =$

$\pi_G(e^{-s\xi})$, où $\xi \in \mathfrak{g}$. Quitte à remplacer $s \mapsto \beta(s)$ par $s \mapsto \beta(\delta s)$, avec $\delta > 0$, on a que β est le développement de la géodésique conforme $\alpha(s) := \pi(\exp(b_0, -s\xi))$, définie sur $[0, 1]$. Le second point de la Proposition 5.1 est prouvé. □

5.3. Annulation de la courbure de Weyl dans le cas $b = 0$. — Il s'agit du cas le plus difficile. On va montrer grâce à la Proposition 3.2 que le flot $\{\phi_X^t\}$ est stable, mais pas fortement stable, sur un ouvert V, et que cet ouvert est "écrasé" sur un segment géodésique de lumière, fixé par le flot (voir le Lemme 5.5). Ceci n'est pas suffisant a priori pour montrer que V est conformément plat. Toutefois, une analyse plus fine de la dynamique, et l'emploi du Théorème 3.3 vont nous permettre de montrer l'annulation du tenseur de Weyl sur un ouvert. La preuve va requérir quatre étapes que nous détaillons ci-dessous.

Puisque $b = 0$, alors a est forcément non nul, car nous avons exclu le cas où a et b valent simultanément 0. On peut encore supposer, quitte à conjuguer $\{h^t\}$ par un élément du centralisateur de $\{e^{tU}\}$ dans P, que $a = 1$ et $\xi = e_3$. Le flot $\{h^t\}$ admet alors l'expression matricielle :

$$h^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t\xi^* & 0 & -\frac{t^2}{2} \\ & 1 & t & & -\frac{t^2}{2} & 0 \\ & & 1 & & -t & 0 \\ & & & \ddots & & -t\xi \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Nous voyons que le flot $\{h^t\}$ fixe point par point la géodésique de lumière Λ, projectivisée dans $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$ du plan $\mathrm{V}ect(e_0, e_1) \subset \mathbf{R}^{2,n}$. Cette géodésique de lumière peut être paramétrée au voisinage de o par $\Lambda(s) := \pi_G(e^{s\xi_1})$, où $\xi_1 \in \mathfrak{n}^-$.

5.3.1. Première étape : dynamique de l'holonomie dans le modèle. — Commençons tout d'abord par quelques considérations géométriques. Nous désignons par Ω_Λ l'ouvert $\mathrm{Ein}^{1,n-1} \setminus \Lambda$. Il est facile de vérifier que si $z \in \Omega_\Lambda$, alors $C(z)$, le cône de lumière issu de z, coupe Λ en un unique point, que l'on note $\pi_\Lambda(z)$. On hérite ainsi d'une submersion $\pi_\Lambda : \Omega_\Lambda \to \Lambda$, dont les fibres sont des hypersurfaces dégénérées (ces fibres sont les intersections des cônes de lumière de la forme $C(x)$, $x \in \Lambda$, avec Ω_Λ). On appelera F_Λ le feuilletage de Ω_Λ par les fibres de l'application π_Λ.

Soit τ la transformation de $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$ définie par $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] \mapsto [x_1, -x_0, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. C'est une application conforme qui laisse Λ globalement invariante, et qui agit sans point fixe sur Λ. Dans la suite, on appelle $U := B(o, R_0)$ le voisinage de o donné par la Proposition 3.2.

Proposition 5.3. — *L'action de $\{h^t\}$ sur $Ein^{1,n-1}$ a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $z \in \Omega_\Lambda$, $\lim_{t\to\pm\infty} h^t.z = \tau(\pi_\Lambda(z))$, la convergence étant uniforme sur les compacts de Ω_Λ.*
2. *Pour tout $z \in \Omega_\Lambda$, et toute suite (t_k) telle que $|t_k| \to \infty$, (h^{t_k}) est stable en z, mais pas fortement stable.*
3. *Il existe un segment géodésique conforme $[\alpha]$ issu de x_0, se développant sur un segment géodésique $[\beta]$, avec $[\beta] \setminus \{o\} \subset \Omega_\Lambda$, et tel que d'une part $h^t.[\beta] \subset U$ pour tout $t \geq 0$, et d'autre part $h^t.[\beta] \to o$ lorsque $t \to \infty$.*

Démonstration. — Considérons $z \in \Omega_\Lambda$. On écrit $z := [x_0 : \cdots : x_{n+1}]$, avec x_n et x_{n+1} qui ne sont pas tous les deux nuls. De l'expression matricielle (20), on tire aisément que

$$\lim_{t\to\pm\infty} h^t.z = [x_{n+1} : x_n : 0 : \cdots : 0].$$

La convergence est de plus uniforme sur les compacts de Ω_Λ. Or $\pi_\Lambda(z) = [x_n : -x_{n+1} : 0 : \cdots : 0]$. On a donc bien $\lim_{t\to\pm\infty} = \tau(\pi_\Lambda(z))$. Ceci montre le premier point de la proposition. La convergence uniforme de h^t vers $\tau \circ \pi_\Lambda$ sur les compacts de Ω_Λ montre que pour toute suite (t_k) telle que $|t_k| \to \infty$, et tout $z \in \Omega_\Lambda$, la suite (h^{t_k}) est stable en z. Elle n'est pas fortement stable car les fibres de l'application $\tau \circ \pi_\Lambda$ sont les feuilles du feuilletage F_Λ. En particulier, il existe des points z' arbitrairement proches de z tels que $\tau(\pi_\Lambda(z')) \neq \tau(\pi_\Lambda(z))$. Il n'existe donc pas de voisinage V de z tel que $h^{t_k}(V) \to \tau(\pi_\Lambda(z))$.

Il nous reste à montrer le dernier point de la proposition. Pour $x \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ fixé, on introduit le polynôme α_x suivant

$$\alpha_x(t) = 1 + x_3 t + \frac{q(x)}{4} \cdot t^2.$$

Alors le flot de $\{h^t\}$ sur $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} h^t.j^o(x) = \Bigg[1 : \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_1 + x_2 t - \frac{x_n}{2} \cdot t^2) : \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_2 - x_n t) \\ : \frac{1}{\alpha_x(t)} \cdot (x_3 + \frac{q(x)}{2} \cdot t) : \frac{x_4}{\alpha_x(t)} : \cdots : \frac{x_n}{\alpha_x(t)} : -\frac{q(x)}{2\alpha_x(t)} \Bigg] \end{aligned}$$

On choisit $x \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ tel que $q(x) \neq 0$ et $x_n = 0$. Alors $h^t.j^o(x) \to o$, donc il existe $T > 0$ tel que pour $t \geq T$, on a $h^t.j^o(x) \in U$. On définit par la suite y_0 par $j^o(y_0) = h^T.j^o(x)$. On a $h^t.j^o(y_0) \in U$ pour tout $t \geq 0$, et donc $\alpha_{y_0}(t) \neq 0$ pour $t \geq 0$. Il s'ensuit que $q(y_0) > 0$.

Par le Lemme 5.2, pour $u \in \mathbf{R}$,

$$h^t.(j^o(uy_0)) = [e_0 + uy_t - u\frac{q(y_t)}{2} e_{n+1} + u(1-u)\frac{q(y_0)}{2} h^t.e_{n+1}]$$

où l'on a à nouveau posé $h^t.j^o(y_0) = j^o(y_t)$. On a encore $y_t \to 0$, et donc $q(y_t) \to 0$.

Posons $\gamma(s) := j^o(-sy_0)$ pour $s \in [0,1]$. On remarque que $[\gamma] \setminus \{o\} \subset \Omega_\Lambda$. Nous allons montrer que $h^t.[\gamma] \to o$. On concluera alors exactement de la même manière que pour la fin de la Proposition 5.1.

Pour montrer que $h^t.[\gamma] \to o$, il suffit de montrer que pour toute suite (u_k) de $[-1,0)$, et toute suite $t_k \to \infty$, on a, quitte à considérer une sous-suite, $\lim_{k\to\infty} h^{t_k}.\gamma(u_k y_0) = o$.

Si la suite $(u_k t_k^2)$ est bornée, on prend une sous-suite de sorte qu'elle converge vers $l \in (-\infty, 0]$. Dans ce cas $1 - \frac{lq(y_0)}{4} > 0$ et on obtient, en utilisant l'expression (20), que $h^{t_k}.j^o(u_k y_0) \to o$.

Si $(u_k t_k^2)$ n'est pas bornée, on peut supposer qu'elle tend vers $-\infty$. Toutes les composantes de $h^{t_k}.j^o(u_k y_0)$ croissent en $O(u_k t_k)$, sauf celle selon e_0 qui est de l'ordre de $u_k t_k^2$: la limite de $(h^{t_k}.j^o(u_k y_0))$ est encore o. □

Corollaire 5.4. — *Pour toute suite (t_k) telle que $|t_k| \to \infty$, et tout $z \in \Omega_\Lambda$, la suite (h^{t_k}) admet, en z, une holonomie de la forme*

$$(h_k) = (diag(\lambda_2(k)^2, \lambda_2(k), \ldots, \lambda_2(k), 1)), \text{ où } 1/\lambda_2(k) \to 0.$$

Démonstration. — On sait par le second point de la Proposition 5.3 que (h^{t_k}) est stable en z. Comme nous l'avons déjà mentionné, cela signifie qu'elle admet en z une suite d'holonomie de la forme $(\mathrm{diag}(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))) \in (A^+)^{\mathbf{N}}$ (voir [Fr4, Lemme 4.3]). Mais nous sommes ici en signature lorentzienne, ce qui veut dire qu'il existe σ_k et μ_k positifs, $\sigma_k \geq \mu_k \geq 1$ tels que $\lambda_1(k) = \sigma_k \mu_k$, $\lambda_i(k) = \mu_k$ si $i = 2, \ldots, n-1$ et $\lambda_n(k) = \frac{\mu_k}{\sigma_k}$. Par ailleurs, toujours par le second point de la Proposition 5.3, on sait que (h^{t_k}) n'est pas fortement stable en z, et il en va de même pour toutes ses sous-suites. Aussi, $1/\lambda_n(k) \geq \delta > 0$ pour tout k. Quitte à multiplier l'holonomie par une suite bornée de P et prendre une sous-suite, on peut donc supposer que $\lambda_n(k) = 1$. On obtient alors une holonomie $(\mathrm{diag}(\lambda_2(k)^2, \lambda_2(k), \ldots, \lambda_2(k), 1))$ de la forme annoncée. □

5.3.2. Deuxième étape : propriétés dynamiques de $\{\phi_X^t\}$ au voisinage de $\alpha(1)$. — Nous reprenons les conclusions et les notations de la Proposition 5.3. En particulier, dans ce qui suit, le segment géodésique $[\alpha]$ est celui donné par le troisième point de la Proposition 5.3.

Lemme 5.5. — *Soit $x_1 = \alpha(1)$. Il existe un voisinage V de x_1, relativement compact dans M, sur lequel ϕ_X^t est défini pour tout $t \geq 0$. De plus, il existe une suite (s_k) qui tend vers l'infini, et une submersion lisse $\rho : V \to \Delta$ telles que :*

1. *Pour tout $x \in V$, $\phi_X^{s_k}.x \to \rho(x)$.*
2. *La suite $(\phi_X^{s_k})$ est stable en chaque point de V, et admet une holonomie de la forme $(h_k) = (diag(\lambda_2(k)^2, \lambda_2(k), \ldots, \lambda_2(k), 1))$ où $\frac{1}{\lambda_2(k)} \to 0$.*

Démonstration. — Par la Proposition 5.3, $[\alpha]$ satisfait aux hypothèses de la Proposition 3.2. On peut donc affirmer qu'il existe un voisinage V de $x_1 := \alpha(1)$

tel que ϕ_X^t soit défini sur V pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t.[\alpha] = x_0$, et il existe une suite $s_k \to \infty$ telle que la suite d'holonomie de $(\phi_X^{s_k})$ en chaque point de V soit l'holonomie de (h^{s_k}) en $\beta(1)$. Par le Corollaire 5.4, cette holonomie est de la forme $(h_k) = (\mathrm{diag}(\lambda_2(k)^2, \lambda_2(k), \ldots, \lambda_2(k), 1))$ avec $\frac{1}{\lambda_2(k)} \to 0$, ce qui prouve le point (2).

Si l'on considère (h_k) comme une suite de $\mathrm{O}(p+1, q+1)$, alors $(\mathrm{Ad}\ h_k)$ restreinte à $\mathfrak{n}^-$ est equivalente à l'action de (h_k) sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$ par la representation standard transposée. Cette suite adjointe tend vers une application, notée $L_\infty \in \mathrm{End}(\mathfrak{n}^-)$, avec $\mathrm{Im}\ L_\infty = \mathbf{R}.\xi_1$ (où ξ_1 est le vecteur de $\mathfrak{n}^-$ tel que $\Lambda(s) = \pi_G(e^{s\xi_1})$). On peut restreindre V de sorte qu'il soit relativement compact.

Choisissons $b_1 \in B$ au-dessus de x_1. Quitte à restreindre encore V, on peut supposer que $V = \pi(\exp(b_1, \mathcal{V}))$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage relativement compact de 0 dans $\mathfrak{n}^-$ et $\zeta \mapsto \pi(\exp(b_1, \zeta))$ réalise un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur V. Comme (h_k) est une suite d'holonomie en x_1, et comme $\phi_X^{s_k}.[\alpha] \to x_0$, il existe une suite (b_k) qui converge vers b_1 telle que $b'_k := \phi_X^{s_k}.b_k.h_k^{-1}$ converge, lorsque $k \to \infty$, vers b'_0 dans la fibre de x_0. Si $x \in V$, on écrit $x = \pi(\exp(b_1, \zeta)) = \pi(\exp(b_k, \zeta_k))$, où $\zeta \in \mathcal{V}$, et $\zeta_k \to \zeta$. On obtient alors pour tout k, en utilisant la relation (4) donnée en la Section 2.3.3 :

$$\phi_X^{s_k}.\exp(b_k, \zeta_k).h_k^{-1} = \exp(b'_k, (\mathrm{Ad}\ h_k)(\zeta_k)),$$

ou encore, en projetant sur M :

$$\lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}(\pi(\exp(b_1, \zeta))) = \pi(\exp(b'_0, L_\infty(\zeta))).$$

Appelons $\tilde{\Delta}(s) := \pi(\exp(b'_0, s\xi_1))$, pour $s \in (-\delta, \delta)$, avec $\delta > 0$ assez petit. Quitte à restreindre encore V, l'application

$$\rho : \pi(\exp(b_1, \zeta)) \mapsto \pi(\exp(b'_0, L_\infty(\zeta)))$$

est une submersion de V sur un intervalle de $\tilde{\Delta}$.

Pour terminer la preuve du lemme, il ne nous reste plus qu'à montrer que $\tilde{\Delta} = \Delta$ (en tant que segments géodésiques de lumière, abstraction faite du paramétrage). Si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, alors il existe un petit voisinage V' de x_1, tel que $\phi_X^t.x \in V$ pour tout $x \in V'$ et $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Soit $I = \rho(V)$ et $I' = \rho(V')$; ce sont deux ouverts de $\tilde{\Delta}$ qui contiennent x_0. De l'identité $\lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}.\phi_X^t.x = \phi_X^t.(\lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}.x)$ pour tout $x \in V'$, on déduit que $\phi_X^t.I' \subseteq I$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. On conclut que $\phi_X^t.\tilde{\Delta} \subset \tilde{\Delta}$, et en particulier, $D_{x_0}\phi_X^t(\tilde{\Delta}'(0)) \in \mathbf{R}\tilde{\Delta}'(0)$. Si l'on écrit, en utilisant les relations (3) et (5) de 2.3.3, que $\tilde{\Delta}'(0) = \iota_{b_0}(\overline{\zeta}_1)$, on obtient $\iota_{b_0}((\overline{\mathrm{Ad}}\ h^t).(\overline{\zeta}_1)) \in \mathbf{R}\iota_{b_0}(\overline{\zeta}_1)$, et ce pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Appelons $\overline{\lambda}^{1,n-1}$ la métrique lorentzienne induite par $\lambda^{1,n-1}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ (voir la Section 2.3.4 pour ces notations). Il est facile de vérifier que $\mathbf{R}\overline{\xi}_1$ est la seule direction de $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ qui soit isotrope relativement à

$\overline{\lambda}^{1,n-1}$, et invariante par $\overline{\mathrm{Ad}}\, h^t$. On obtient donc $\overline{\zeta}_1 = \overline{\xi}_1$, et $\tilde{\Delta}'(0) = \Delta'(0)$. Remarquons pour conclure qu'en géométrie pseudo-riemannienne, deux segments géodésiques de lumière qui ont une même tangente en un point sont identiques sur l'intersection de leurs domaines de définition. □

Notons que lorsque la dimension de M est 3, on déduit directement du second point du lemme ci-dessus que V est un ouvert conformément plat, et par analyticité, (M, g) est aussi conformément plate. Cela résulte de la Proposition 5 de [Fr1]. Nous supposerons dorénavant que la dimension de M est au moins quatre.

Dans ce qui suit, nous noterons $\mathbf{PL}(TM)$ le projectivisé du fibré des vecteurs non nuls de type lumière de TM. On définira $\mathbf{PL}(V)$ de manière pareille lorsque V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire lorentzien. Dans la proposition qui suit, α et β sont les géodésiques conformes données par le troisième point de la Proposition 5.3.

Proposition 5.6. — *Si $x_1 := \alpha(1)$, et $[u] \in \mathbf{PL}(T_{x_1}M)$, on a :*

$$\lim_{k\to\infty} D_{x_1}\phi_X^{s_k}([u]) = [\Delta'(0)],$$

la limite étant prise dans $\mathbf{PL}(TM)$.

Démonstration. — Écrivons $\alpha(v) = \pi(\exp(b_0, v\xi_\alpha))$, où $\xi_\alpha \in (\mathrm{Ad}\ P)(\mathfrak{n}^-)$. On pose $\hat{\alpha}(v) = \exp(b_0, v\xi_\alpha)$. Le développement de $\hat{\alpha}$ en 1_G est $\hat{\beta}$ définie par $\hat{\beta}(v) = e^{v\xi_\alpha}$. Enfin $\beta = \pi_G \circ \hat{\beta}$. Nous savons que $h^{s_k}.[\beta] \to o$. On en déduit l'existence d'une courbe $p_k : [0,1] \to P$ telle que $h^{s_k}\hat{\beta}(v)h^{-s_k}p_k(v)^{-1}$ soit une courbe du groupe $N^- := e^{\mathfrak{n}^-}$. Comme $\pi_G \circ e$ réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{n}^-$ sur un voisinage de o dans $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$, on obtient :

$$h^{s_k}\hat{\beta}(1)(p_k h^{s_k})^{-1} \to 1_G,$$

où l'on a posé $p_k = p_k(1)$. On en déduit que $(\tilde{h}_k) := (p_k h^{s_k})$ est une suite d'holonomie de (h^{s_k}) au point $\hat{\beta}(1)$.

Dans ce qui suit, l'élément de $\mathbf{PL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ déterminé par un $\overline{\zeta}$ non nul de $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ sera noté $[\zeta]$. Nous allons montrer :

Lemme 5.7. — *Pour tout $[\zeta] \in \mathbf{PL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$, on a $\lim_{k\to\infty}(\overline{Ad}\ \tilde{h}_k).[\zeta] \to [\xi_1]$.*

Démonstration. — Dans l'univers d'Einstein $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$, le projectivisé du fibré des vecteurs de type lumière, noté $\mathbf{PL}(T\mathrm{Ein}^{1,n-1})$, s'identifie à l'espace des géodésiques de lumières marquées de $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$. Maintenant, si Γ est une géodésique de lumière passant par $\beta(1)$, on aura que $h^{s_k}.\Gamma \to \Lambda$. Pour le voir, commençons par supposer que Γ ne passe pas par $\pi_\Lambda(\beta(1))$. Alors pour $z \in \Gamma$ différent de $\beta(1)$, $\pi_\Lambda(z) \neq \pi_\Lambda(\beta(1))$. Il ressort de la Proposition 5.3 que $\lim_{k\to\infty} h^{s_k}.\beta(1) \neq \lim_{k\to\infty} h^{s_k}.z$, où ces deux limites sont des points de Λ. On conclut donc que $\lim_{k\to\infty} h^{s_k}.\Gamma = \Lambda$. Maintenant, si Γ passe par $\beta(1)$ et $\pi_\Lambda(\beta(1))$, on a d'une part $\lim_{k\to\infty} h^{s_k}.\beta(1) = \tau(\pi_\Lambda(\beta(1)))$, et d'autre part $\lim_{k\to\infty} h^{s_k}.\pi_\Lambda(\beta(1)) = \pi_\Lambda(\beta(1))$, puisque $\pi_\Lambda(\beta(1)) \in \Lambda$. Comme $\tau(\pi_\Lambda(\beta(1))) \neq \pi_\Lambda(\beta(1))$, on a là encore $\lim_{k\to\infty} h^{s_k}.\Gamma = \Lambda$. Si l'on exprime ceci dans $\mathbf{PL}(T\mathrm{Ein}^{1,n-1})$, cela signifie que pour tout $[u] \in \mathbf{PL}(T_{\beta(1)}\mathrm{Ein}^{1,n-1})$:

$$\lim_{k\to\infty} D_{\beta(1)}h^{s_k}([u]) = [\Lambda'(0)]. \tag{21}$$

Écrivons $[u] = \iota_{\hat\beta(1)}([\zeta])$. Alors, utilisant les relations (3) et (5) :

$$D_{\beta(1)}h^{s_k}(\iota_{\beta(\hat 1)}([\zeta])) = \iota_{h^{s_k}\hat\beta(1)\tilde h_k^{-1}}((\overline{\mathrm{Ad}}\ \tilde h_k).[\zeta]).$$

Comme nous avons vu que $(h^{s_k}\hat\beta(1)\tilde h_k^{-1})$ tend vers 1_G, la relation (21) va impliquer $(\overline{\mathrm{Ad}}\ \tilde h_k).[\zeta] \to [\xi_1]$. □

À $k \in \mathbf{N}$ fixé, on considère la courbe

$$v \mapsto \phi_X^{s_k}.\exp(b_0, v\xi_\alpha).h_k^{-1} = \exp(\phi_X^{s_k}.b_0.h_k^{-1}, (\mathrm{Ad}\ h_k)(v\xi_\alpha)).$$

Le développement de cette courbe en 1_G est $v \mapsto h^{s_k}e^{v\xi_\alpha}h^{-s_k}$. Par la formule (1) donnée en Section 2.3, la courbe $\hat\gamma_k : v \mapsto \phi_X^{s_k}.\hat\alpha(v).h^{-s_k}p_k(v)^{-1}$ se développe en 1_G sur $\hat\sigma_k : v \mapsto h^{s_k}\hat\beta(v).h^{-s_k}p_k(v)^{-1}$. Donnons nous sur le groupe G une métrique riemannienne invariante à gauche, définie à partir d'un produit scalaire $< , >_{\mathfrak g}$ sur $\mathfrak g$. On appelle $L^G(\hat\sigma_k)$ la longueur de $\hat\sigma_k$ pour cette métrique. Sur B, on définit une métrique riemannienne $< , >_B$ en posant $< u, w >_B = < \omega(u), \omega(w) >_{\mathfrak g}$. On appelle $L(\hat\gamma_k)$ la longueur de $\hat\gamma_k$ relativement à cette métrique. Il est clair que $L(\hat\gamma_k) = L^G(\hat\sigma_k)$. Comme $\hat\sigma_k$ est une courbe du groupe N^-, qui se projette dans $\mathrm{Ein}^{1,n-1}$ vers $h^{s_k}.[\beta]$, qui tend vers o, il découle de [Fr3, Prop 3.2] que $L^G(\hat\sigma_k)$ tend vers 0, et donc $[\hat\gamma_k]$ tend vers b_0. En particulier :

$$\lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}.\hat\alpha(1).\tilde h_k^{-1} = b_0.$$

Pour tout $[\zeta] \in \mathbf{PL}(\mathfrak g/\mathfrak p)$, on peut alors écrire :

$$D_{x_1}\phi_X^{s_k}(\iota_{\hat\alpha(1)}([\zeta])) = \iota_{\phi_X^{s_k}.\hat\alpha(1).\tilde h_k^{-1}}((\overline{\mathrm{Ad}}\ \tilde h_k).[\zeta]),$$

ce qui, au vu du Lemme 5.7, conduit, pour tout $[u] \in \mathbf{PL}(T_{x_1}M)$, à :

$$\lim_{k\to\infty} D_{x_1}\phi_X^{s_k}([u]) = \iota_{b_0}([\xi_1]) = [\Delta'(0)].$$

Ceci conclut la preuve de la proposition. □

5.3.3. Troisième étape : annulation du tenseur de Weyl en x_0. — Nous reprenons les conclusions du Lemme 5.5 : il existe un ouvert V contenant $x_1 = \alpha(1)$ sur lequel ϕ_X^t est défini pour $t \geq 0$, et une suite $s_k \to \infty$ telle que l'holonomie de $(\phi_X^{s_k})$ en tout point de V soit de la forme

$$(h_k) = (\mathrm{diag}(\lambda_2(k)^2, \lambda_2(k), \ldots, \lambda_2(k), 1)),\ \text{avec } 1/\lambda_2(k) \to 0.$$

On va appliquer le Théorème 3.3 à $(\phi_X^{s_k})$, quitte à restreindre l'ouvert V. L'entier s donné par le Théorème 3.3 vaut ici 3. Les suites $(\mu_i(k))$ fournies par le théorème sont $\mu_3(k) = 1$, $\mu_2(k) = 1/\lambda_2(k)$, et $\mu_1(k) = \mu_2(k)^2$ pour tout k. De la Remarque 3.4, on tire que le feuilletage F_2 de V est un feuilletage par hypersurfaces dégénérées, et que F_1 est un feuilletage par géodésiques de lumières. Pour tout x dans V, on a de plus $\mathcal{F}_1(x)^\perp = \mathcal{F}_2(x)$.

On considère un repère $\{u_1(x_1), \ldots, u_n(x_1)\}$ en x_1, de sorte que $u_1(x_1)$ appartienne à $\mathcal{F}_1(x_1)$, $\{u_1(x_1), \ldots, u_{n-1}(x_1)\}$ soit une base de $\mathcal{F}_2(x_1) = \mathcal{F}_1(x_1)^\perp$, et $u_n(x_1)$ soit isotrope avec de plus $g_{x_1}(u_1(x_1), u_n(x_1)) = 1$. Les points $1(a)$ et $1(b)$ du Théorème 3.3 fournissent alors une suite de repères $((u_{1,k}(x_1), \ldots, u_{n,k}(x_1)))$ en x_1, convergeant vers $(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_1))$, telle que

$$\begin{aligned} ||D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{1,k}(x_1))|| &= \Theta(\mu_2(k)^2) \\ ||D_{x_1}\phi^{s_k}(u_{i,k}(x_1))|| &= \Theta(\mu_2(k)),\ i = 2, \ldots, n-1 \\ ||D_{x_1}\phi^{s_k}(u_{n,k}(x_1))|| &= \Theta(1) \end{aligned}$$

Lemme 5.8. — *On a les restrictions suivantes sur le tenseur de Weyl en y :*

1. $W|_{\mathcal{F}_2(x_1)} = 0$.
2. *Pour tout $u \in T_{x_1}M$, on a $W_{x_1}(u_1(x_1), u, u_1(x_1)) = 0$.*
3. *Pour $i, j, l \in \{1, \ldots, n\}$, on a $W_{x_1}(u_i(x_1), u_j(x_1), u_l(x_1)) \in \mathcal{F}_1(x_1)$, sauf éventuellement si $i = l = n$ ou $j = l = n$.*

Démonstration. — Comme, $\phi_X^t.x_1$ reste dans un compact de M pour $t \geq 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$||W_{\phi_X^t x_1}(a, b, c)|| \leq C||a|| \cdot ||b|| \cdot ||c|| \ \forall\ t \geq 0.$$

Si deux des indices i, j, l sont dans $\{1, \ldots, n-1\}$, alors :

$$||W_{\phi_X^{s_k}.x_1}(D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{i,k}(x_1)), D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{j,k}(x_1)), D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{l,k}(x_1)))|| = o\left(\mu_2(k)\right)$$

Alors par équivariance de W,

$$||D_{x_1}\phi_X^{s_k}(W_{x_1}(u_{i,k}(x_1), u_{j,k}(x_1), u_{l,k}(x_1)))|| = o\left(\mu_2(k)\right)$$

Par le Théorème 3.3, cela prouve que

$$W_{x_1}(u_i(x_1), u_j(x_1), u_l(x_1)) \in \mathcal{F}_1(x_1) \tag{22}$$

De même, pour tout $u \in T_{x_1}M$:

$$||W_{\phi_X^{s_k}.x_1}(D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{1,k}(x_1)), D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u), D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{1,k}(x_1)))|| = o\left(\mu_2(k)^2\right)$$

Le point $1(a)$ du Théorème 3.3 permet alors d'affirmer que

$$W_{x_1}(u_1(x_1), u, u_1(x_1)) = 0.$$

Enfin, le même type d'argument montre que

$$W_{x_1}(u_i(x_1), u_j(x_1), u_l(x_1)) = 0 \qquad i, j, l < n. \tag{23}$$

□

Nous allons à présent montrer que le tenseur de Weyl s'annule en x_1. Pour cela, on constate que d'après le choix des suites $(u_{i,k}(x_1))$, les vecteurs $\frac{1}{\mu_2(k)} D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{i,k}(x_1))$ sont de normes bornées si $i < n$. Quitte à considérer une sous-suite de (s_k), on aura que pour $i < n$, $\frac{1}{\mu_2(k)} D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{i,k}(x_1))$ converge vers un vecteur $v_{i,\infty} \in T_{x_0}M$. Par ailleurs, d'après la Proposition 5.6, il existe une suite (ν_k) telle que $D_{x_1}\phi_X^{s_k}(\nu_k u_1(x_1))$ tende vers $u_\infty \in \mathbf{R}^*.\Delta'(0)$.

Par invariance du tenseur de Weyl, et par le point (2) du Lemme 5.8, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$W_{\phi_X^{s_k}.x_1}(D_{x_1}\phi_X^{s_k}(\nu_k u_1(x_1)), \frac{1}{\mu_2(k)} D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{i,k}(x_1)), D_{x_1}\phi_X^{s_k}(\nu_k u_1(x_1))) = 0.$$

En passant à la limite, on obtient que :

$$W_{x_0}(u_\infty, v_{i,\infty}, u_\infty) = 0 \tag{24}$$

Maintenant, par le Théorème 3.3, et par la Proposition 5.6, il existe $\delta > 0$ tel que $D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_n(x_1)) \to \delta u_\infty$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_2(k)} D_{x_1}\phi_X^{s_k}(W_{x_1}(u_n(x_1), u_{i,k}(x_1), u_n(x_1))) \\
&= W_{\phi_X^{s_k}.x_1}(D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_n(x_1)), \frac{1}{\mu_2(k)} D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_{i,k}(x_1)), D_{x_1}\phi_X^{s_k}(u_n(x_1))) \\
&\to \delta^2 W_{x_0}(u_\infty, v_{i,\infty}, u_\infty) \\
&= 0
\end{aligned}$$

par l'équation (24).

La suite des vecteurs $(W_{x_1}(u_n(x_1), u_{i,k}(x_1), u_n(x_1)))$ est contractée par $(D_{x_1}\phi_X^{s_k})$ plus vite que $(\mu_2(k))$. Donc, par le Théorème 3.3, on a :

$$W_{x_1}(u_n(x_1), u_i(x_1), u_n(x_1)) \in \mathcal{F}_1(x_1).$$

Cette relation, jointe au Lemme 5.8, permet de conclure que l'image de W_{x_1} est contenue dans $\mathbf{R}.u_1(x_1) = \mathcal{F}_1(x_1)$ et que le tenseur de Weyl est nul sur $u_1(x_1)^\perp = \mathcal{F}_2(x_1)$. Comme on a par ailleurs :

$$\begin{gathered}
g_{x_1}(W_{x_1}(u_i(x_1), u_j(x_1), u_n(x_1)), u_n(x_1)) = \\
-g_{x_1}(W_{x_1}(u_i(x_1), u_j(x_1), u_n(x_1)), u_n(x_1)) = 0,
\end{gathered}$$

on obtient que la composante de Weyl sur $u_1(x_1)$ est aussi nulle. La conclusion est que le tenseur de Weyl s'annule en x_1, et aussi en x_0 puisque $x_0 = \lim_{k\to\infty} \phi_X^{s_k}.x_1$.

5.3.4. Quatrième étape : annulation du tenseur de Weyl sur Δ et fin de la preuve. — Considérons à nouveau un paramétrage de Λ au voisinage de o de la forme $\Lambda(s) := \pi_G(e^{s\xi_1})$, où $\xi_1 \in \mathfrak{n}^-$. Comme $\{h^t\}$ fixe tous les points de Λ, il en va de même de $\{h_v^t\} := e^{-v\xi_1} h^t e^{v\xi_1}$, pour tout $v \in \mathbf{R}$. En particulier $\{h_v^t\} < P$, et la relation $h^t e^{v\xi_1} h_v^{-t} = e^{v\xi_1}$ montre que $\{h_v^t\}$ est un flot d'holonomie de $\{h^t\}$ en $\Lambda(v)$. Pour $v \in (-\epsilon, \epsilon)$ avec $\epsilon > 0$ assez petit, $v \mapsto \pi(\exp(b_0, v\xi_1))$ est un paramétrage de Δ au voisinage de x_0. Il n'est pas très difficile de vérifier que $\{h_v^t\}$ est un flot d'holonomie de $\{\phi_X^t\}$ en $\Delta(v)$ (voir par exemple la Proposition 4.3 de [FM]). Les lemmes et propositions montrés lors des trois premières étapes restent alors valables si l'on remplace o par $\Lambda(v)$, x_0 par $\Delta(v)$, et la géodésique β par $e^{-v\xi_1}.\beta$. En particulier, on obtient de la même manière que précédemment que le tenseur de Weyl est nul en $\Delta(v)$ pour tout $v \in (-\epsilon, \epsilon)$, en ayant choisi un ϵ assez petit.

Soit V le voisinage original de $x_1 = \alpha(1)$. La suite $(\phi_X^{s_k})$ est stable sur V, et les images $(\phi_X^{s_k}.V)$ tendent vers un segment de Δ, où le tenseur de Weyl s'annule. On conclut par [Fr1, Prop 4(i)] que W s'annule sur V. Comme M est supposée analytique, alors elle est conformément plate partout.

6. Un flot contractant sur une variété non conformément plate

Le fait qu'un flot conforme contracte un ouvert non vide assure la platitude conforme de l'ouvert lorsque la signature est riemannienne ou lorentzienne, mais ne suffit pas forcément pour prouver l'annulation du tenseur de Weyl sur cet ouvert en signature arbitraire. Comme on l'a vu plus haut, les vitesses relatives de contractions dans les différentes directions jouent un rôle important. On peut néanmoins énoncer le résultat général suivant :

Théorème. — [Fr4, Th. 1.2] *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension $n \geq 3$. On suppose qu'il existe un ouvert non vide $U \subset M$ et une suite de plongements conformes $f_k : U \to M$ telle que la suite d'ouverts $f_k(U)$ converge vers un point de M pour la topologie de Hausdorff. Alors (U, g) est localement conformément Ricci-plat.*

Par localement conformément Ricci-plat, on entend qu'il existe au voisinage de chaque point de U une métrique Ricci-plate dans la classe conforme de g.

Dans l'exemple qui suit, nous construisons un flot linéaire qui contracte un voisinage de l'origine, et agit conformément pour une métrique *qui n'est pas conformément plate.*

Considérons sur $\mathbf{R}^6$ la métrique

$$g = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_6 + \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_5 + \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 + x_1x_2x_3\mathrm{d}x_1^2$$

Le flot linéaire

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & & & & & \\ & e^{-2t} & & & & \\ & & e^{-3t} & & & \\ & & & e^{-5t} & & \\ & & & & e^{-6t} & \\ & & & & & e^{-7t} \end{pmatrix}$$

est conforme pour cette métrique.

On va montrer que la courbure de Weyl de g ne s'annule pas sur le triplet (e_1, e_2, e_1), où les e_i forment la base standard de $\mathbf{R}^6$. Par abus de langage, on notera encore e_i le champ de vecteurs invariant par translations, valant e_i en 0. On a $[e_i, e_j] = 0$ pour tous i, j. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\langle e_1, e_1\rangle = \frac{1}{2}x_2x_3 \\
\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\langle e_1, e_1\rangle = -\frac{1}{2}x_1x_3 \\
\langle \nabla_{e_1} e_1, e_3 \rangle &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\langle e_1, e_1\rangle = -\frac{1}{2}x_1x_2 \\
\langle \nabla_{e_1} e_1, e_i \rangle &= 0 \qquad i = 4, 5, 6
\end{aligned}$$

Donc

$$\nabla_{e_1} e_1 = -x_1x_2e_4 - x_1x_3e_5 + x_2x_3e_6$$

Des calculs similaires donnent

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_2 &= -x_1x_3e_6 \\
\nabla_{e_1} e_3 &= -x_1x_2e_6 \\
\nabla_{e_j} e_i &= 0 \qquad j = 1, \ldots, 6,\ i = 4, 5, 6
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_1 &= -x_1e_4 + x_3e_6 \\
\nabla_{e_1}\nabla_{e_1} e_2 &= -x_3e_6
\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure R de g prend alors la valeur

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= (\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2})e_1 \\
&= (\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} - \nabla_{e_1}\nabla_{e_1})e_2 \\
&= -x_1e_4 + 2x_3e_6
\end{aligned}$$

Supposons que $x_2x_3 = 0$ mais $x_1 \neq 0$. Alors

$$\langle W(e_1, e_2)e_1, e_3\rangle = \langle R(e_1, e_2)e_1, e_3\rangle - (g \circ P)(e_1, e_2, e_1, e_3)$$

où $\circ$ est le produit de Kulkarni-Nomizu, et P est le tenseur de Schouten (voir [B, p.48]). Ce produit est

$$\begin{aligned} g \circ P(e_1, e_2, e_1, e_3) &= g(e_1, e_1)P(e_2, e_3) + g(e_2, e_3)P(e_1, e_1) \\ &\quad -g(e_1, e_3)P(e_2, e_1) - g(e_2, e_1)P(e_1, e_3) \\ &= x_1 x_2 x_3 P(e_2, e_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\langle W(e_1, e_2)e_1, e_3\rangle = \langle R(e_1, e_2)e_1, e_3\rangle = -x_1 \neq 0$$

et on conclut que $W(e_1, e_2, e_1)$ ne s'annule sur aucun voisinage de l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

[A] D.V Alekseevskii : Groups of conformal transformations of Riemannian spaces. Math. USSR, Sb. 18 (1972), 285-301.

[BCDGM] T. Barbot, V. Charette, T. Drumm, W. M. Goldman, K. Melnick : A primer on the (2+1) Einstein universe, in Recent developments in pseudo-Riemannian geometry (D. Alexeevskii and H. Baum, eds). Zürich : European Mathematical Society. ESI Lectures in Mathematics and Physics, 179-229 (2008).

[BCH] M.S Capocci, R. Beig, G. S. Hall : Zeros of conformal vector fields, Classical Quantum Gravity 14 (1997), no. 3, 49–52.

[B] A.Besse : Einstein manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 10. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[ČM] A. Čap and K. Melnick : Essential Killing fields of parabolic geometries, arXiv :1208.5510 (2012).

[Ca1] M. S. Capocci : Essential conformal vector fields, Classical Quantum Gravity 16 (1999), no. 3, 927–935.

[Ca2] M. S. Capocci : Conformal vector fields and non-degenerate distributions, Classical Quantum Gravity 13 (1996), 1717–1726.

[F1] J. Ferrand : The action of conformal transformations on a Riemannian manifold, Math. Ann. 304 (1996), no. 2, 277–291.

[F2] J. Ferrand : Sur un lemme d'Alekseevskii relatif aux transformations conformes. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 284, 121-123 (1977).

[Fr1] C. Frances : Causal conformal vector fields, and singularities of twistor spinors, Ann. Global Anal. Geom. 32 (2007), no. 3, 277–295.

[Fr2] C. Frances : thesis. http ://www.math.u-psud.fr/ frances/

[Fr3] C. Frances : Local dynamics of conformal vector fields, Geometriae Dedicata. 158 (2012), no. 1, 35–59.

[Fr4] C. Frances : Dégénerescence locale des transformations pseudo-riemanniennes conformes. arXiv :1008.2436v1. À paraître dans Annales de l'Institut Fourier.

[FM] C. Frances, K. Melnick : Conformal actions of nilpotent groups on pseudo-Riemannian manifolds, Duke Math. J. 153 (2010), no. 3, 511–550.

[G] M. Gromov : Rigid transformations groups, in Geometrie Differentielle (D. Bernard and Y. Choquet-Bruhat, eds.) Paris : Hermann, 1988.

[Ko] S. Kobayashi : Transformation groups in differential geometry. Berlin : Springer-Verlag (1995).

[KR1] W. Kühnel, H. B. Rademacher : Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry. II, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 4 (1997), no. 3, 649–662.

[KR2] W. Kühnel, H. B. Rademacher : Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry, J. Math. Pures Appl. (9) 74 (1995), no. 5, 453–481.

[KR3] W. Kühnel, H.B. Rademacher : Conformal vector fields on pseudo-Riemannian spaces. Differential Geom. Appl. 7 (1997), no. 3, 237–250.

[Me] K. Melnick : A Frobenius theorem for Cartan geometries, with applications. *eprint arXiv :0812.0624v2.* L'Enseignement Mathématique (Sér. II) 57 no. 1-2 (2011) 57-89.

[Mo] D. W. Morris : Introduction to arithmetic groups, *eprint arXiv :math/0106063v3.*

[NO] T, Nagano, T. Ochiai : On compact Riemannian manifolds admitting essential projective transformations. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 33, 233-246 (1986).

[Sh] R. W. Sharpe : Differential Geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen Program. Berlin : Springer-Verlag (1997).

[St] M. Steller : Conformal vector fields on spacetimes, Ann. Global Anal. Geom. 29 (2006), no. 4, 293–317.

[Yo76] Y. Yoshimatsu : On a theorem of Alekseevskii concerning conformal transformations. J. Math. Soc. Japan 28 (1976), no. 2, 278–289.