Fonction phi d'Euler

Définition (Fonction phi d'Euler) : Pour tour entier $n \geqslant 1$ on définit $\varphi(n)$ comme le nombre d'entiers compris entre 1 et n (inclus) qui sont premiers avec n.

Exemples : On a $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$, $\varphi(5) = 4$, et $\varphi(n) \neq 3$. Donc on peut trouver plusieurs fois la même valeur, certaines valeurs ne sont jamais pris, et la fonction n'est pas croissante ($\varphi(4) < \varphi(5) > \varphi(6)$).

• Pour tout nombre premier p on a $\varphi(p) = p - 1$. [C'est clair.]
• Pour tout nombre premier p et tout exposant $e \geqslant 1$ on a

$$\varphi(p^e) = (p-1)p^{e-1}\,.$$

[La valeur est $p^e - p^{e-1}$: on prends les entiers entre 1 et p^e moins les multiples de p dans cet interval.]
• Si n et n' sont premier entre eux [mais pas en général !], on peut montrer que on a $\varphi(n \cdot n') = \varphi(n) \cdot \varphi(n')$.
Les propriétés ci-dessus permettent de calculer $\varphi(n)$ facilement si on connait la factorisation de n en nombres premiers. [On calcule φ pour les puissances des nombres premiers dans la factorisation, et on prend le produit des nombres obtenus.]

Exemples :

$$\varphi(31) = 30$$
$$\varphi(81) = 2 \cdot 3^3 = 54$$
$$\varphi(60) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 2 \cdot 4\,.$$
$$\varphi(1.000.000.000) = \varphi(2^9) \cdot \varphi(5^9) = 2^8 \cdot (4 \cdot 5^8) = 400.000.000\,.$$

Théorème d'Euler : Soit $m \geqslant 2$ un entier. Si m et a sont premier entre eux, on a

$$m \mid (a^{\varphi(m)} - 1)\,.$$

Exemples :

$$3 \mid (10^{\varphi(3)} - 1) = 10^2 - 1 = 99$$
$$7 \mid (10^{\varphi(7)} - 1) = (10^6 - 1) = 999.999$$
$$11 \mid (10^{\varphi(11)} - 1) = 10^{10} - 1$$

Car $11 \mid (10^2 - 1) = 99$ on vois bien que pour certains nombres a il y a des exposants plus petit de $\varphi(m)$ pour lesquelles $m \mid (a^{\varphi(m)} - 1)$. Ces exposants divisent $\varphi(m)$.