# Nombres rationnels

## 1 Définition

Une nombre rationnel est donné par une classe de **fractions** ($\frac{a}{b}$ avec numérateur $a \in \mathbb{Z}$ et dénominateur $b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$) qui sont toutes équivalentes. [Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont dites équivalentes si $ad = bc$.] Par exemple le nombre rationnel $3$ est aussi

$$3 = \frac{30}{10} = \frac{-12}{-4} = \frac{3}{1}$$

La meilleure fraction (réduite) est celle avec dénominateur strictement positif, et avec numérateur et dénominateur qui sont premiers entre eux. [Les entiers vont avoir dénominateur $1$.]
Une nombre rationnel est aussi un **nombre reel** dont la suite de chiffres après la virgule est périodique. Par exemple

$$\frac{1}{9} = 0,1111111\ldots = 0,\overline{1} \qquad \frac{1}{8} = 0,1250000 = 0,125$$

La période est $0$ (qu'on n'écrit pas) pour les fractions ayant comme dénominateur réduit un nombre qui divise une puissance de $10$ (c.à.d. $2$ et $5$ sont les seuls facteurs premiers admis). La période $9$ n'est pas utilisée pour garantir l'unicité de l'écriture décimale : en effet, on a

$$0,\overline{9} = 0,99999\ldots = 1$$

et on ne veut pas écrire par exemple $0,5$ comme $0,4\overline{9}$. On écrit une période de longeur minimale, par exemple on écrit $0,4\overline{5656}$ comme $0,4\overline{56}$. On veux aussi commencer la période dès qu'on peut, par exemple on écrit $0,3121\overline{21}$ comme $0,3\overline{12}$.

## 2 Écriture decimale $\to$ Fraction

• D'abord : Le signe moins est rajouté au numérateur à la fin et peut être oublier.
• Écrivons le nombre come une somme de chiffres avant la période et du nombre $0,\overline{\textit{période}}$ fois une puissance de $10$. Par exemple :

$$0,12\overline{081} = 0,12 + \frac{1}{10^2} \cdot 0,\overline{081}\,.$$

• Prenons la *période* comme un nombre entier (dans l'exemple, $81$), et remarquons le nombre $n$ de chiffres sous la période (dans l'exemple, $3$). On a

$$0,\overline{\textit{période}} = \frac{\textit{période}}{10^n - 1}$$

(dans l'exemple, $\frac{81}{999}$).
• On peut conclure. Dans l'exemple,

$$0,12\overline{081} = \frac{12}{100} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{81}{999} = \frac{12069}{99900}\,.$$

Le nombre de $9$ dans le dénominateur est le nombre de chiffres sous la période minimale, et le nombre de $0$ est le nombre de chiffres après la virgule et avant la période. La fraction trouvée n'est pas forcement réduite : dans l'exemple la fraction réduite est $\frac{447}{3700}$.

# 3 Fraction $\rightarrow$ Écriture decimale

On fait la division (soit nous, soit l'ordinateur). Mais quand faut-il arrêter ? Par exemple, est-ce que le quotient partiel $0,123232323$ est le début du nombre $0,1\overline{23}$ ou, par exemple, du nombre $0,123232323\overline{456}$ ?
La période peut être longue, par exemple $1/7 = 0,\overline{142857}$. On peut aussi avoir beaucoup de chiffres avant la période, par exemple $1/48 = 0,0208\overline{3}$.

• On part du dénominateur de la fraction réduite.

• On garde les facteurs premiers $2$ et $5$ seulement, et le nombre trouvé divise une puissance de $10$. L'exposant de la puissance minimale que on peut prendre nous donne *le nombre de chiffres après la virgule et avant la période*.
Pour $1/40$ on a $40 \mid 10^3$, et donc on s'attend à $3$ chiffres avant la période. Pour $1/70$ on a $10 \mid 10^1$ et donc on s'attend à $1$ chiffre avant la période.

• On garde les facteurs premiers different de $2$ et $5$. Il y a un resultat de l'arithmétique modulaire qui nous dit que ce nombre divise une puissance de $10$ moins $1$ (donc un nombre avec uniquement chiffre $9$). L'exposant de la puissance minimale qu'on peut prendre nous donne *la longueur de la période minimale*.
On sait que $7 \mid 10^{\varphi(7)} - 1$, et donc la période pour $1/7$ divise $6$ (elle est $6$). On sait que $11 \mid 10^{\varphi(11)} - 1$, et donc la période pour $1/11$ divise $10$ (elle est $2$).

# 4 Remarques

On peut écrire les nombres rationnels dans des bases differentes de $10$, par exemple dans la base $2$ :

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = (1,011)_2\,.$$

Il ne faut pas se lancer dans des calculs avec la période, mais calculer avec les fractions :

$$0,\overline{6} + 3,\overline{7} \neq 4,\overline{3} \qquad (0,\overline{6})^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}\,.$$