# Comptage

## 1 Le principe de multiplication

Souvent on utilise l'idée suivante :
**Le „principe de multiplication"** . *Le nombre de possibilités avec plusieurs choix indépendants est le produit du nombre de possibilités de chaque choix.*

Il est très important que les choix soient indépendants, sinon, les conditions limitent les possibilités. L'ordre dans lequel on fait les choix compte.
Les différents choix donnent la liste ordonnée des résultats. Pour $k$ choix, on obtient un $k$-uplet ordonné. Il faut donc énumérer les éléments d'un produit cartésien d'ensembles, et on connait la formule pour ses nombres d'éléments :

$$|E_1 \times E_2 \cdots \times E_k| = |E_1| \cdot |E_2| \cdots |E_k| = \prod_{i=1}^{k} |E_i|$$

Formulation alternative : Supposons que l'événement $E$ peut être décomposé en $k$ événements indépendents $E_1, \ldots, E_k$ et que l' événement $E_1$ peut se produire de $n_1$ façons, l' événement $E_2$ de $n_2$ façons etcetera jusqu'à l'événement $E_k$ qui peut se produire de $n_k$ façons. Alors le nombre total de possibilités pour l'événement $E$ est donné par le produit $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$.

Exemple du quotidien : On est 10 personnes. L' un d'entre nous doit organiser un dîner et un autre (peut-être le même) doit organiser un jeu de foot. On a $100 = 10 \cdot 10$ possibilités : $10$ pour le premier choix et $10$ pour le deuxième choix. Si on cherche différentes personnes pour exécuter les différents tâches (le choix n'est donc pas indépendant !), on a $10 \cdot 9$ possibilités, car pour le deuxième choix, on ne peut choisir que parmi $9$ personnes. L'ordre des choix a son importance : clairement ce n'est pas la même chose, quand la personne $A$ organise le dîner et quand la personne $B$ organise le jeu de foot, ou vice versa.

## 2 Le principe d'addition et de complementarité

Une **partition** d'un ensemble est une collection de sous-ensembles non vides qui sont disjoints deux à deux, et telle que leur union soit l'ensemble de depart. Si un ensemble fini $E$ a une partition donnée par des sous-ensembles $E_1, \ldots, E_k$, on a la formule (**principe d'addition**)

$$|E| = |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_k| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$$

qui stipule que le nombre d'éléments de $E$ est la somme des nombres d'éléments des sous-ensembles de la partition. Cette formule est évidente, car chaque élément se trouve dans un et un seul sous-ensemble de la partition.

Avec deux sous-ensembles (donc $k = 2$) on trouve tout simplement

$$|E| = |E_1| + |E_2|$$

Car $E_2$ est le complémentaire de $E_1$ dans $E$, on a le **principe de complementarité**

$$|E_2| = |E| - |E_1|\,.$$

Exemple du quotidien : L'un d'entre nous dix doit organiser un dîner et un parmi les six joueurs de foot doit organiser un jeu de foot. On a $100 = 10 \cdot 6$ possibilités : $10$ pour le premier choix et $6$ pour le deuxième choix.
Si on cherche différentes personnes pour exécuter les différentes tâches : $24 = (10-6)\cdot 6$ possibilités (si aucun joueur de football n'organise le dîner) plus $30 = 6 \cdot 5$ possibilités (si un joueur de foot organise le dîner). Donc au total $54$ possibilités. Cet exemple a été plus compliqué : ce que j'ai fait, c'est de diviser en deux l'ensemble des possibilités en une partition et d'examiner séparément les différentes parties.

# 3 Le principe d'inclusion-exclusion

Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis. La formule du principe d'inclusion-exclusion (ou formule du crible) s'écrit

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En d'autres termes, nous pouvons compter les éléments de la réunion de deux ensembles A et B en additionnant les cardinaux de ces deux ensembles et en soustrayant le cardinal de leur intersection. Cette formule est évidente : Avec $|A| + |B|$ on aurait compté deux fois les éléments de l'intersection.
Pour trois ensembles on a une formule similaire :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Pour plusieurs ensembles on a une formule générale comme suit :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Exemple du quotidien : Parmi les étudiants d'une école, $321$ ont participé à une activité $A$, $211$ à une activité $B$ et $101$ ont participé aux deux activités. Combien d'étudiants on participé à au moins une activité ? Grâce au principe d'inclusion-exclusion il y en a $321 + 211 - 101 = 431$.