Exercices Comptage

1. Combien de menus complètes différents peut-on composer si on a le choix entre 2 entrées, 3 plats, et 4 desserts ?

   Solution : 12 possibilités, car le choix sont indépendants.

2. Le livre “Cent mille milliards de poèmes” contient 10 possibilité pour chacun de 14 verses d’un sonnet. Combien de poèmes a-t-on exactement ?

   Solution : 10^{14}, car le choix sont indépendants.

3. Fixons deux vertices opposés A et B d’un cube. Quel est le nombre des parcours de A à B sur les côtés qui passent une et une seule fois de chaque vertex ?

   Solution : 6 Possibilités : Il faut choisir d’abord entre 3 cotés. Après, car on ne peut pas aller en arrière, entre 2 cotés. Après le parcours est déterminé, on n’as plus de choix.

4. Combien de sous-ensemble de l’ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on des éléments dont la somme est impaire ?

   Solution : Il faut que le sous-ensemble ait 1 ou trois éléments impaires. On a 4 façons de choisir un élément impaire, et 4 façons de choisir trois éléments impaires distincts, puisque il faut choisir tout simplement le nombre impaire que on ne prends pas. En total, 8 possibilités. Après, il faut choisir un sous-ensemble quelconque de nombres paires. L’ensemble $\{2, 4, 6\}$ a 3 éléments, et donc $2^3 = 8$ sous-ensembles. On a en totale 64 possibilités.

5. Dans un competition de poker, chaque soirée 4 participants jouent une partie. Après 13 soirées chacun a joué contre chacun autre participant exactement une fois. Combien sont les joueurs ?

   Solution : Les nombre des joueurs dans toutes parties est 52. Le nombre de partie à jouer pour chacun est $\frac{n-1}{3}$, où n est le nombre de participants. On a donc $n\frac{n-1}{3} = 52$, qui donne $n = 13$.

6. Dans un rencontre on a 21 participants, qui se donnent la main. Chacun donne la main une fois a toute les autres. Combien poignée de main a-t-on en totale ?

   Solution : Le premier echange 20 poignée de mains, le deuxième 19, etc.. On trouve $\frac{20 \cdot 21}{2}$.

7. Considérons 8 droites dans le plan, dont 4 sont parallèles entre eux. Combien de points d’intersection a-t on ?

   Solution : Les premières 4 droites ne s’intersectent pas. La cinquième croise tout les 4 (4 points d’intersection). La sixième croise tout les 5 (5 points d’intersection). La septième donne 6 points d’intersection et la huitième 7 points d’intersection. En total a-t on $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ points d’intersection.

8. Dans combien de façons peut on écrire le nombre 51 en utilisant au plus 5 puissances de deux ?

   Solution : En utilisant les puissances de deux plus grands possibles : $32+16+2+1$. Après on peut soustituir 32 par $16+16$, ou 16 par $8+8$ ou 2 par $1+1$.

9. Deux équipes de hockeys de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe. Combien de poignées de main on été échanges ?

   Solution : $12 \times 15 = 180$, car il faut choisir pour chaque poignée un joueur d'un équipe et un joueur de l'autre, e cettes choix sont indépendantes.

10. Combien de numéros de deux chiffres contient la chiffre 9 ?

    Solution : Si 9 est à le chiffre de l'unité, on a 9 possibilités (de 1 à 9) pour le chiffre de la decine. Si 9 est à le chiffre de la decine, on a 10 possibilités (de 0 à 9) pour le chiffre de l'unité. Il faut soubtrahire 1 car le nombre 99 vient compté sinon deux fois. En totale $9+10-1=18$ nombres.

11. Combien de dés peut on obtenir en colorant les six faces d'un dés en noire ou blanche ?

    Solution : On a un dés noir et un dés blanche, un dés avec exactement une façe noir, et un dés avec exactement une façe blanche. On a deux dés avec deux façes noirs (adjacentes ou opposées), on a deux dés avec deux façes blanches. On a deux dés avec trois façes noirs (qui se rejoindrent dans un vertex ou avec deux façes opposées), ce dés ont trois façes blanches. En totale, on a 10 dés.

12. Certains étudiants de l'Université ont suivi un cours d'Astronomie (A), un cours de botanique (B), ou un cours de chemie (C). Nous avons les informations suivantes :

    32 on suivi (A), 51 ont suivi (B), 52 ont suivi (C) ;

    22 on suivi (A) et (B), 21 ont suivi (B) et (C), 12 ont suivi (A) et (C) ;

    2 ont suivi (A),(B), et (C).

    Combien d'étudiants ont suivi (A) et (B) mais pas (C) ?
    Combien d'étudiants ont suivi seulement (C) ?
    Solution : Choisissons la notation. Par exemple AB est le nombre d'étudiantes qui ont suivi exactement les courses (A) et (B), et $\overline{AB}$ le nombre d'étudiantes qui ont suivi au moins les courses (A) et (B).
    Les informations données sont : $\overline{A} = 32$, $\overline{B} = 51$, $\overline{C} = 52$, $\overline{AB} = 22$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{BC} = 21$, $ABC = 2$
    On peut calculer

$$AB = \overline{AB} - ABC = 22 - 2 = 20$$

$$AC = \overline{AC} - ABC = 12 - 2 = 10$$

$$BC = \overline{BC} - ABC = 21 - 2$$

    Alors est $C = \overline{C} - ABC - AC - BC = 52 - 2 - 10 - (21 - 2) = 21$.