Le principe des tiroirs

1 Le principe des tiroirs

Ce principe de théorie des ensembles est à la fois simple et très puissant. Dans ce théorème, on considère des objets (chaussettes, pigeons,...) que l'on doit ranger dans des boites (tiroirs, cases de pigeonnier, ...)
Le principe des tiroirs stipule la chose suivante, qui est évidente : **s'il y a plus d'objets que de boites, on va toujours pouvoir trouver au moins une boite contenant au moins deux objets** (en toute rigueur, on suppose qu'il y a au moins une boite et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'objets et de boites).

Si tu lances sept dés alors au moins deux d'entre eux tomberont sur le même numéro.
Ici le principe des tiroirs peut s'appliquer car on a 7 objets (les dés) et 6 boites (le numéros sur les dés), et 7 est plus grand que 6. S'il y avait eu seulement 6 dés, le principe des tiroirs ne t'aurait été d'aucune utilité.

À titre d'exemple, utilise ce principe pour répondre à la question suivante :
Tu es dans le noir, étant donné un certain nombre de chaussettes de cinq couleurs différentes, combien de chaussettes (au minimum) doit-tu récupérer pour être certain d'en avoir deux de la même couleur ?
En considérant les chaussettes comme nos objets et les couleurs comme nos boites, nous voyons bien que six chaussettes suffisent...

2 Le principe des tiroirs, version quantitative

Supposons avoir six chaussettes, de couleur noir ou blanche. Par le principe des tiroirs, on a au moins deux chaussettes de la même couleur. Un peu mieux, on peut même dire que l'on en a trois de la même couleurs. Même s'il n'y a que cinq chaussettes, on pourra toujours être sûr d'en avoir trois de la même couleur.

La **version quantitative du principe des tiroirs** stipule qu'il y a au moins une boite avec au moins N objets, où le nombre N s'obtient comme suit :
divise le nombre d'objets par le nombre de boites ;
si ce rapport n'est pas en entier, arrondis-le par excés
De façon équivalente, si on a n objets et k boites, on trouve $N = \lceil \frac{n}{k} \rceil$, où $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ est le plus petit nombre entier qui est plus grand ou égal à $\frac{n}{k}$.

Par exemple, si tu as 31 chaussettes et 3 couleurs, tu obtiendras $N = 11$; si tu as 30 chaussettes et 3 couleurs, tu obtiendras $N = 10$.

Explication de la version quantitative : Soit k le nombre de boites, et soit le nombre de objets au moins $(N-1)k+1$. Si dans chaque boite on a au plus $(N-1)$ objets, on aura au total au plus $(N-1)k$ objets, ce qui contredit notre hypothèse . Donc il y a forcément au moins une boite avec au moins N objets.

À noter que ce type de raisonnement prouve seulement l'existence d'une boite et n'indique laquelle en aucune façon.

3 Astuces

Voilà un certain nombre de règles à vérifier pour pouvoir appliquer le principe des tiroirs à un problème mathématique :

— Dans ton problème, tu dois repérer les objets et les boites. Parfois, le choix est clair, d'autre fois, il faut faire preuve d'un peu d'astuce.

— Les boites peuvent venir de la géométrie : *Par exemple, considère sept personnes dans le monde : au moins quatre d'entre elles sont dans le même hémisphère.*

— Les boites doivent être construites en fonction du problème. Les boites (comme ensembles) ne sont pas forcément identiques. *Par exemple, si tu prends trois nombres parmi* $17, 27, 37, 14, 24$ *alors au moins deux d'entre eux ont le même chiffre des unités. Ce sont les ensembles* $\{17, 27, 37\}$ *et* $\{14, 24\}$ *qui joueront le rôle des boites.*