Coefficients multinomiaux

1 La factorielle

La **factorielle** est un nombre naturel n qui est défini de manière suivante : On a : $0! = 1$ et pour tous $n \geq 1$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

Exemples :

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120$$

Attention parenthèses : Pour éviter des erreurs il faut utiliser des parenthèses :

A-t-on $\quad 2 \cdot 3! = 2 \cdot (3!) = 2 \cdot 6 = 12 \quad$ ou $\quad 2 \cdot 3! = (2 \cdot 3)! = 6! = 720 \quad ?$

La bonne réponse est $2 \cdot 3! = 2 \cdot (3!)$, mais des parenthèses ne font pas de mal.

Remarque : Soient n, N deux nombres naturels avec $N > n$, alors par simplification de fraction, on obtient :

$$\frac{N!}{n!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (n+1) \cdot (n!)}{n!} = N \cdot (N-1) \cdots (n+1)$$

Exemples : $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \cdot (4!)}{4!} = 5$ et $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot (3!)}{3!} = 20$.

2 Coefficient binomial

Soient n et k deux nombres naturels avec $0 \leq k \leq n$, alors on définit le coefficient binomial „k parmi n“ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Exemples :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n \qquad \text{(pour } n \geq 1\text{)}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{(pour } n \geq 2\text{)}$$

Les coefficients binomiaux sont des nombres naturels (> 0). Il s'agit de nombres strictement rationnels et positifs (claire d'après la définition). Mais après une réduction, on obtient un nombre naturel. Par exemple :

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{720}{48} = 15$$

„La règle de la symétrie“ : De la définition du coefficient binomial (car $n-(n-k)=k$) résulte que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

„Formule de Pascal“ : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Ces deux règles peuvent être illustrées par le triangle de Pascal : Dans la n-ème ligne on trouve le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ pour k de 0 à n :

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

Généralisation : On définit

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{pour } k > n \text{ ou pour } k < 0$$

Autre généralisation : Soit α un nombre quelconque réel. Soit k un nombre entier. On définit :

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{quand } k > 0 \\ 1 & \text{quand } k = 0 \\ 0 & \text{quand } k < 0 \end{cases}$$

Exemples : $\binom{2{,}5}{2} = \frac{2{,}5 \cdot 1{,}5}{2!} = \frac{3{,}75}{2} = 1{,}875$ et $\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$ pour $k > 0$.

Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \neq 0$ des nombres réels et soit $n > 0$ un nombre naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple : $n = 1$
$(a+b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$

Exemple : $n = 2$
$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple : $n = 3$
$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

3 Coefficients multinomiaux

Soient $n, k_1, \ldots, k_s$ des nombres naturels avec $n = k_1 + \cdots + k_s$,
alors le **coefficient multinomial** associé est :

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_s!}$$

Exemples :

$$\binom{6}{3,1,2} = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60 \qquad \binom{9}{2,1,5,1} = \frac{9!}{2! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 1512$$

La valeur du coefficient multinomial quand tous le k_i sont égaux à 1 est $n!$. Par example :

$$\binom{6}{1,1,1,1,1,1} = \frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 6! = 720$$

Si $s = 2$, c.à.d. $n = k_1 + k_2$, on peut aussi utiliser la désignation suivante : $k_1 = k$, $k_2 = n - k$. On retrouve alors un coefficient binomial :

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

On peut conclure que les coefficients multinomiaux sont des généralisations de la factorielle et des coefficients binomiaux.

Les coefficients multinomiaux sont des *nombres naturels* (même s'ils sont définis avec une fraction).
Il découle clairement de la définition que l'ordre des $k_1, \ldots, k_s$ n'a pas d'importance.
Avancé : On peut exprimer les coefficients multinomiaux comme produit des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_s} = \binom{k_1}{k_1}\binom{k_1+k_2}{k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_s}{k_s} = \prod_{i=1}^{s}\binom{\sum_{h=1}^{i} k_h}{k_i}$$

Exemple :

$$\binom{6}{3,1,2} = \binom{3}{3}\binom{4}{1}\binom{6}{2} = 1\cdot 4\cdot 15 = 60$$

Formule du multinôme de Newton

Soient $a_1, \ldots, a_s \neq 0$ des nombres réels, et soit $n > 0$ un nombre naturel, alors :

$$(a_1 + \cdots + a_s)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_s \\ k_1+\cdots+k_s=n}} \binom{n}{k_1,\ldots,k_s}\cdot a_1^{k_1}\cdots a_s^{k_s}$$

Exemple :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

d'où

$$\binom{3}{3,0,0} = \frac{3!}{3!\cdot 0!\cdot 0!} = 1 \qquad \binom{3}{2,1,0} = \frac{3!}{2!\cdot 1!\cdot 0!} = 3 \qquad \binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!} = 6$$