Exercices Permutations

1. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

   Solution : Il s'agit de permuter 4 élement distinctes, donc on a $4! = 24$ éléments distincts.

2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot TABLEAU ?

   Solution : Il s'agit de permuter 7 élement, dont deux sont égaux. On a donc $7!/2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ anagrammes.

3. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATRICE réspectivement
   – commençant et finissant par une consonne ;
   – commençant et finissant par une voyelle ;
   – commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   – commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?

   Solution : On a 4 consonnant et 3 voyelles. Commençant et finissant par une consonne : on a 12 possibilité de choisir le debut et la fine du mot. Après il reste $5!$ permutations de le lettres restantes. Donc $12 \cdot 5! = 12 \cdot 120 = 1440$ Commençant et finissant par une voyelle : on a 6 possibilité de choisir le debut et la fine du mot. Après il reste $5!$ permutations de le lettres restantes. Donc $6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$. commençant par une consonne et finissant par une voyelle c'est le même que commençant par une voyelle et finissant par une consonne (on peut inverser l'ordre de les lettres). On a alors une consonne initiale, que on peut choisir dans 4 façons, et une voyelle finale que on peut choisir dans 3 façons. Après il reste $5!$ permutations de le lettres restantes. Donc $12 \cdot 5! = 12 \cdot 120 = 1440$.

4. Quel est le nombre de manières d'asseoir n couples mariés mari-épouse au tour d'un table ronde de $2n$ places de telle sorte que les maries et épouses soient alternés ?

   Solution : On a 2 possibilité pour choisir les places de mari et les places pour les épouses. Après on a $n!$ possibilités pour arranger les maris et $n!$ pour arranger les épouses. Car il s'agit de choix indépendants, on a $2(n!)^2$ possibilités.

5. Sur une échiquier, dans combien de façons peut-on placer 8 tours pour contrôler toutes les cases inoccupées ?

   Solution : On a besoin d'un tour par ligne et d'un tour par colonne. On peux choisir sur la première ligne la colonne de 8 façons différents, sur la deuxième ligne de 7 façons etc. donc la réponse est $8!$ par le principe des choix indépendants. On peux voir aussi ce problème comme suit : on pose les 8 tours sur une diagonale, et on fait une permutation quelconque de les 8 colonnes : il y a $8!$ permutations.