Permutations

Les permutations normales concernent des éléments qui sont tous différents les uns des autres (permutations sans répétition). Si quelques éléments ne sont pas discernables, on parle de permutations d'objets non discernables (permutations avec répétitions).
IDÉE : Les permutations sont les arrangements possibles de l'ensemble ou du multiensemble. On utilise chaque objet exactement une seule fois.

1 Permutations d'objets discernables

Soit un ensemble de n éléments donnés ($n \geq 1$ étant un nombre naturel). On veut arranger les n différents éléments de l'ensemble, on choisit alors lequel sera le premier élément, lequel sera le deuxième élément, et ainsi de suite, jusqu'au dernier, au (n-ème) élément. On appelle un tel arrangement **permutation (sans répétition)**. On dit „sans répétition", car tous les éléments sont discernables.
Puisque pour le premier objet il existe n possibilités de placement, pour le deuxième objet il ne reste que $n-1$ possibilités, pour le troisième objet il ne reste que $n-2$ possibilités, et ainsi de suite jusqu'au dernier objet, pour lequel ne reste qu'une seule possibilité de placement. Le nombre de permutations sans répétition possible est donc :

Permutations de n objets discernables : (factorielle)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

Exemple : On a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ arrangements possibles de quatre balles de couleurs différentes, mises dans une ligne.

Exemple : Lors de la finale d'un concours il restent encore 5 participants. Combien de possibilités existe-t-il pour le classement ? On connait la quantité des participants (5 éléments) et il nous faut l'arrangement. Il s'agit donc du nombre de permutations sans répétitions pour un ensemble de 5 éléments, lequel est $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Applications : Par la traduction des éléments, notre ensemble est :

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

On associe à chaque nombre entre 1 et n (le classement) un élément. Une permutation sans répétition correspond donc à une application

$$\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

Exemple : $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$ signifie que le premier élément est 2 et que le deuxième élément est 1 et que le troisième élément 3. Dans un tableau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple : $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$ signifie que le premier élément est 2 et que le deuxième élément est 3 et que le troisième élément est 1. Dans un tableau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Plusieurs permutations successives d'un même ensemble aboutissent toujours à une permutation.

Avancé : cycles, transpositions

— *Produit de cycles disjoints* : Quand on analyse une permutation sans répétition de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on trouve des cycles disjoints.
Exemple : Pour la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

on obtient les cycles suivants :

$$(12) \quad 1 \mapsto 2 \mapsto 1 \qquad (3) \quad 3 \mapsto 3$$

Exemple : Pour la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient le cycle suivant :

$$(123) \quad 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$$

Exemple : Pour la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

on obtient les cycles suivants :

$$(12) \quad 1 \mapsto 2 \mapsto 1 \qquad (365) \quad 3 \mapsto 6 \mapsto 5 \mapsto 3 \qquad (4) \quad 4 \mapsto 4$$

Les cycles de longueur 1 sont souvent omis.

— *Enchaînement des transpositions* : Quand on analyse une permutation quelconque, on découvre que celle-ci représente toujours un enchaînement de transpositions. Une transposition est une permutation, laquelle échange deux éléments. On distingue les permutations paires des permutations impaires (c.à.d. un nombre pair ou impair de transpositions est nécessaire).
Exemple : La permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
est une transposition. Dans le cycle (12), les éléments 1 et 2 seraient échangés.
Exemple : La permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
est écrit de la manière suivante comme enchaînement de transpositions : $(231) = (23) \circ (12)$. Il s'agit d'une permutation paire.
Exemple : La permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
est écrit de la manière suivante comme enchaînement de transpositions : $(12) \circ (65) \circ (36)$. Il s'agit d'une permutation impaire.

— *Transpositions* : Chaque transposition est un enchaînement de transpositions, lesquelles échangent deux objets voisins. C'est assez intuitif dans la vie quotidienne, quand on fait la queue et qu'on veut échanger sa place avec quelqu'un.
Exemple :
$$(13) = (12) \circ (23) \circ (12) \qquad ABC \mapsto BAC \mapsto BCA \mapsto CBA$$

2 Permutations d'objets non discernables

Soient n objets donnés, qui ne sont pas tous discernables (ou qu'on ne veut pas discerner), soient donc s groupes avec $k_1, \ldots, k_s$ objets identiques (ou identifiés) donnés, on a :
$$k_1 + \ldots + k_s = n$$
Exemple : On a 8 fleurs, dont 5 roses, 1 iris et 2 marguerites, alors on a ici $n = 8$, $s = 3$, $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$ (et $5 + 1 + 2 = 8$).
Puis on veut arranger les objets, mais on ne peut pas discerner quand des objets identiques sont échangés. Ainsi, des objets identiques sont interchangeables à leur place sans nouvel ordre. On appelle un tel arrangement **permutation (avec répétition)**.
Quand k objets sont identiques, on peut les échanger dans $k!$ façons sans rien changer. Alors le nombre de permutations avec répétition possibles est :

Permutations de $n = k_1 + \ldots + k_s$ objets : (coefficient multinomial)

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

Remarque : Quand on n'a que deux sortes d'objets, c'est à dire si $n = k_1 + k_2$, on peut utiliser la notion $k_1 = k$, $k_2 = n - k$, et ainsi trouver le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
Remarque : Quand tous les objets sont discernables, alors tous les groupes ont la puissance 1, ainsi on retrouve (comme il se doit) la permutation sans répétition.

$$\binom{n}{1, 1, \ldots, 1} = \frac{n!}{1! \cdot 1! \ldots \cdot 1!} = n!$$

Exemple : On a $\frac{4!}{2!\,1!\,1!} = \frac{24}{2} = 12$ arrangements possibles de quatre balles colorées, mises dans une ligne, si exactement deux de ces balles sont de même couleur, et il existe $\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$ arrangement possibles si les balles sont de même couleur, deux à deux.

Exemple : A la finale d'un concours, il reste encore 8 participants. Cinq de ces participants appartiennent à une même équipe, deux autres participants appartiennent à une deuxième équipe et le participant restant appartient à une troisième équipe. Si le classement ne tient compte que des équipes, combien de possibilités existe-t-il pour le classement ? On connait le nombre de participants (8 éléments) et on veut identifier 5 respectivement 2 respectivement 1 de ces éléments. On veut donc déterminer le nombre de permutations avec répétition, qui est

$$\binom{8}{5, 2, 1} = \frac{8!}{5! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 168\,.$$

On obtient le même résultat avec les 8 fleurs, dont 5 roses, 1 iris et 2 marguerites.