Arrangements

Un **arrangement** est un choix d'objets dans un ordre défini. Si chaque objet n'apparait qu'une seule fois, on parle d'un **arrangement sans répétition**. Si chaque objet peut être choisi plusieurs fois, on parle d'un **arrangement avec répétition**.
IDÉE : On sélectionne un ordre pour les objets. On sélectionne quels objets ainsi que dans quel ordre ils apparaissent. Sans répétition : Un objet apparait au maximum une seule fois (ou jamais). Avec répétition : Un objet apparait un nombre quelconque de fois. Les objets sont discernables.

1 Arrangements sans répétition

Soient n, k des nombres naturels avec $k \leq n$. On a n objets différents. On doit choisir et ordonner k de ces éléments. On ne peut choisir chaque élément qu'une seule fois. Equivalent : On choisit à chaque fois un autre objet et on considère l'ordre. Chaque choix correspond à une liste ordonnée avec k éléments différents.

Arrangements (sans répétition) de k éléments parmi n : (Produit)

$$n^{\underline{k}} := \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Notation : $n^{\underline{k}}$ est le produit des k premiers facteurs de $n!$: On commence par n, ainsi le dernier facteur est $(n-k)+1$.
Pourquoi : On peut choisir le premier objet de n manières différentes, le deuxième objet de $n-1$ manières différentes, le troisième de $n-2$ manières différentes, et ainsi de suite. Ainsi l'objet k peut être choisi de $n-(k-1) = n-k+1$ manières différentes.

Exemple : On veut attribuer les trois premières positions, entre 10 participants (de T_1 à T_{10}) d'une course. Il y a une médaille d'or, une médaille d'argent et une médaille de bronze. Personne ne peut obtenir deux médailles. Combien de possibilités existe-t-il pour ce classement ? On considère l'arrangement (sans répétition) de 3 éléments parmi 10, ce qui donne

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Par exemple on a pour les trois premières places (T_{10}, T_2, T_7).
Remarque : Dans le cas spécial $n = k$ on trouve (comme il se doit) la *permutation de n objets discernables*, parce que dans ce cas spécial il n'existe pas de choix pour les objets.

2 Arrangements avec répétition

Soient n, k des nombres naturels. On a n objets différents. On doit en choisir et ordonner k. Un objet peut être choisi plusieurs fois. Équivalent : On choisit un objet et on respecte l'ordre. Chaque choix correspond à une liste ordonnée d'éléments k qui ne sont pas nécessairement différents.

Arrangements (avec répétition) de k éléments parmi n, : (exponentiation)

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

Pourquoi : Le premier objet peut être choisi de n manières différentes, le deuxième objet de n manières différentes, le troisième objet de n manières différentes et ainsi de suite. L'objet k peut donc être choisi de n manières différentes.

Exemple : Il y a trois courses $1, 2, 3$ et toujours les 10 mêmes participants (de T_1 à T_{10}). On veut attribuer la médaille d'or. Un participant peut recevoir plusieurs médailles d'or. Combien de possibilités existe-t-il ? On considère les arrangements (avec répétition) de 3 éléments parmi 10 et on obtient

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

Par exemple on a le résultat (T_{10}, T_2, T_{10}). Ainsi T_{10} peut avoir gagné la première et le troisième course et la deuxième course peut être gagnée par T_2.

Exemple de la loterie : On a 11 nombres à choisir et on choisit à chaque fois entre trois résultats (à savoir $0, 1, 2$). Les répétitions sont possibles. L'ordre des nombres à choisir est important. Ainsi ici on a un arrangement (avec répétition) de 11 éléments parmi 3. Les nombre de choix possibles est 3^{11}, qui est environs 200.000
Attention : Dans un permutation avec répétitions, les objets ne sont pas discernables et il faut utiliser l'objet aussi souvent qu'il est disponible. Dans un arrangement avec répétition on choisit à chaque fois entre différents objets, dont un objet peut être choisi plus ou moins souvent, même jamais.